

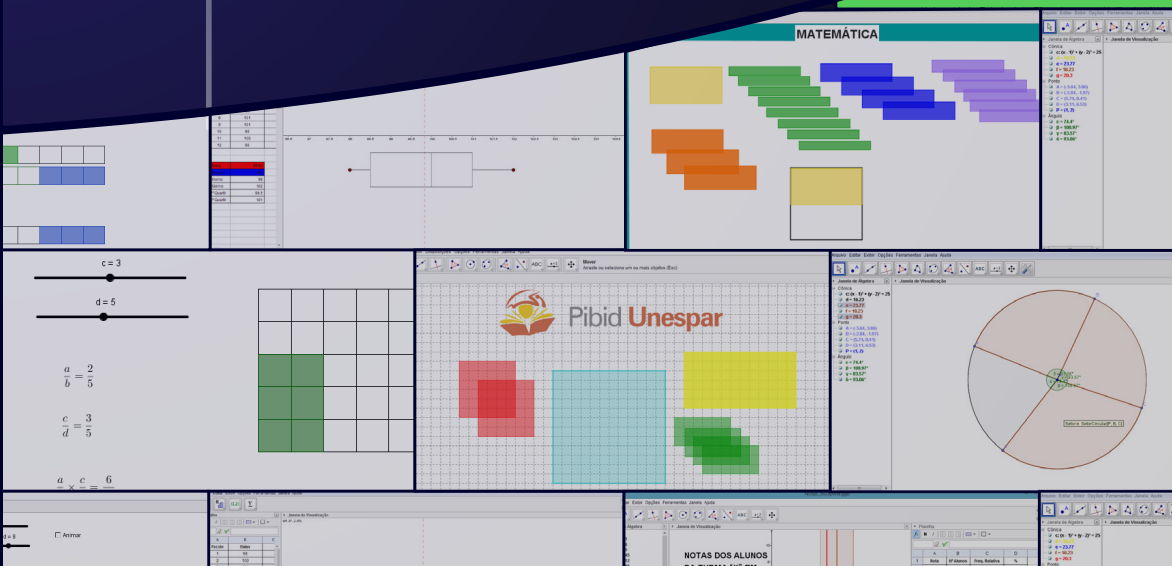
O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica

frações, estatística,
círculo e circunferência

ORGANIZADORES

Maria Ivete Basniak

Everton José Goldoni Estevam



O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica

frações, estatística, círculo e circunferência

MARIA IVETE BASNIAK
EVERTON JOSÉ GOLDONI ESTEVAM
Organizadores

Antonio Carlos Aleixo
Reitor

Antonio Rodrigues Varela Neto
Vice-reitor

Mário Cândido de Athayde Junior
Pró-Reitor de Ensino de Graduação

Márcia Marlene Stentzler
Coordenação Institucional

Sandra Salete de Camargo Silva
*Coordenação de Gestão de Área
Campus de União da Vitória*

Organizadores

Maria Ivete Basniak
Everton José Goldoni Estevam

Livro editado com recursos do CAPES/PIBID.

G345 O GeoGebra e a matemática da educação básica
frações, estatística, círculo e circunferência / organização Maria
Ivete Basniak, Everton José Goldoni Estevam – Curitiba: Ithala, 2014.
130p.: il; 23 cm

Acompanha Tarefas para o Aluno
Vários colaboradores
ISBN 978-85-61868-84-0

1. Matemática - Aprendizagem. 2. GeoGebra (Software). I. Basniak,
Maria Ivete (org.). II. Estevam, Everton José Goldoni (org.).

CDD 510 (22.ed)
CDU 51



EDITORA ÍTHALA

Rua Aureliano Azevedo da Silveira, 49
82.030-040 | Curitiba-PR
Fone: +55 (41) 3093-5252
Fax: +55 (41) 3093-5257
<http://www.ithala.com.br>
E-mail: editora@ithala.com.br

Revisão Ortográfica

Ressílvia Aparecida Steniski Finger
Silvanete Marques

Projeto Gráfico e Diagramação

Maiane Gabriele de Araujo

Capa

Maiane Gabriele de Araujo

O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica

frações, estatística, círculo e circunferência

MARIA IVETE BASNIAK
EVERTON JOSÉ GOLDONI ESTEVAM
Organizadores

Curitiba/2014

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	9
---------------------------	----------

Os Organizadores

Capítulo 1 – O SOFTWARE GEOGEBRA.....	13
--	-----------

Dirceu Scaldelai

Noções iniciais e origem do software	13
Ferramentas e comandos utilizados nas tarefas	17
Mover.....	17
Novo ponto	17
Segmento de reta definido por dois pontos.....	18
Segmento com comprimento fixo.....	18
Polígono regular	18
Círculo definido pelo centro e um de seus pontos	19
Círculo dados centro e raio.....	19
Círculo definido por três pontos.....	19
Distância, comprimento, perímetro	19
Inserir texto.....	20
Controle Deslizante	21
Botão direito do mouse	21
Referências	23

Capítulo 2 – FRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DE ONDE PARTIMOS E O QUE ESPERAMOS	24
--	-----------

Maria Ivete Basniak

Sobre as concepções de frações	25
Frações como parte/todo (medida)	26
Encaminhamentos do material	27
Avaliação	31
Referências	32

FRAÇÕES: uma nova ideia de número..... 33

*André Rafael Liziero • Carlos Krassowski Filho • Cláudia Tratch • Édino Andrioli •
Germano Vier Alves • Maria Ivete Basniak • Norberto J. Polsin Jr. •
Sandra Regina Kimak • Simão Nicolau Stelmastchuk • Victor H. G. Martinez*

Tarefa 1	33
Tarefa 2	35
Tarefa 3	37
Tarefa 4	37
Tarefa 5	40
Tarefa 6	41
Tarefa 7	43
Tarefa 8	47
Tarefa 9	48
Tarefa 10	49
Tarefa 11	51
Tarefa 12	56
Tarefa 13	58

**Capítulo 3 – ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
REFLEXÕES SOBRE ALGUNS PRESSUPOSTOS..... 61**

Everton José Goldoni Estevam

Educação estatística no ensino básico	61
Encaminhamento do material	67
Avaliação	69
Referências	70

Tarefa 1: pacotes de balas	72
----------------------------------	----

*Ariel Marczaki • Marília Dranka • Dirceu Scaldelai •
Everton José Goldoni Estevam*

Objetivos da tarefa	73
Conhecimentos prévios.....	73
Seriação sugerida.....	73
Orientações para o professor	73

Tarefa 2: desempenho da turma	80
<i>Patrícia Andressa Maieski • Willian Burgardt de Souza • Clara Caroline Uniat • Dirceu Scaldelai • Joaide F. C. S. Bughay</i>	
Objetivos da tarefa	80
Conhecimentos prévios.....	80
Serição sugerida.....	81
Orientações para o professor	81
 Tarefa 3: eleições.....	 86
<i>Jocemar Pontes Ribeiro • Clara Caroline Uniat • Willian Burgardt de Souza • Everton José Goldoni Estevam • Dirceu Scaldelai</i>	
Objetivos da tarefa	86
Conhecimentos prévios.....	86
Serição sugerida.....	86
Orientações para o professor	87

Capítulo 4 – O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL: CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA 94

Henrique Cristiano Thomas de Souza

Círculo e circunferência: construção de seus conceitos.....	94
Definição de circunferência.....	96
Cálculo do comprimento da circunferência.....	97
Definição de círculo.....	98
Cálculo da área do círculo	98
Características das tarefas	99
Avaliação	101
Tarefas com orientações para o professor	102
Referências	103

GEOMETRIA: Círculo e Circunferência 104

*Henrique Cristiano Thomaz de Souza • Norberto José Polsin • Natali Angela Felipe •
Suelen Geronço • Isaias Guilherme de Souza Boruch • Celine Maria Paulek •
Matheus Mauricio Novinski • Jackson Rodrigo Soares • Cristiane Katchoroski
Marcelo Moreira*

Tarefa 1	104
Tarefa 2	108
Tarefa 3	112
Tarefa 4	116
Tarefa 5	120

APRESENTAÇÃO

Este material é resultado de mais de um ano de estudos e discussões realizadas por alunos da licenciatura em Matemática do primeiro, segundo, terceiro e quarto anos que integram o Subprojeto do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) *Tecnologias e Formação de Professores para o Ensino da Matemática*, professores da Educação Básica, aluna já formada do curso de licenciatura em Matemática e ex-pibidiana, e professores da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *campus* de União da Vitória, que se dispuseram a dedicar seu tempo e contribuir com esta produção.

Buscamos produzir material adequado para trabalhar na Educação Básica aproveitando o potencial que as tecnologias digitais têm para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, a partir de tarefas que possibilitem o aluno explorar as ideias matemáticas e, assim, apropriar-se dos conceitos e procedimentos com significado. Nessa direção, após inúmeras discussões e pesquisas, ainda que realizadas em grupos diferentes, acabamos todos convergindo para o mesmo *software*, o GeoGebra, no qual encontramos a forma de atingir nossos objetivos através da dinamicidade que o mesmo oferece.

Alunos pibidianos, supervisores e professores da Educação Superior (voluntários no PIBID) dividiram-se em três (sub) grupos de trabalho, a partir da afinidade com os conteúdos estruturantes propostos: Números e Álgebra, Geometrias e Estatística. Os resultados dos trabalhos realizados nesses grupos originaram tarefas nos diferentes campos da Matemática da Educação Básica, com devidas reflexões didáticas que buscam orientar seus encaminhamentos em sala de aula, cuja síntese constitui a presente obra.

O primeiro capítulo apresenta considerações sobre o *software* GeoGebra, algumas de suas potencialidades para o ensino e aprendizagem da Matemática e as principais ferramentas utilizadas neste material.

No segundo capítulo é apresentado o material elaborado pelo grupo de Números e Álgebra que desenvolveu material referente ao conteúdo *frações*, partindo da concepção de frações enquanto medidas. A fim de situar o leitor/professor, consta um texto introdutório do material que discute

brevemente as concepções que as frações podem assumir, focando, em segundo momento, as frações como medida (perspectiva assumida nas tarefas). São apresentados os encaminhamentos para o material produzido, e por fim, algumas considerações sobre como se pode proceder em relação à avaliação das tarefas propostas. O material para o aluno é composto por 13 tarefas, sendo que as três primeiras buscam introduzir o conceito de fração como medida. As Tarefas 4 e 5 referem-se à comparação de frações e as 6 e 9 tratam do conteúdo equivalência de frações. As Tarefas 7 e 8 inserem, respectivamente, a adição e subtração de frações com mesmo denominador. A Tarefa 10 trabalha com adição de frações, mas com denominadores diferentes e a Tarefa 11 propõe o estudo da multiplicação de frações a partir da área de um retângulo. Por fim, a Tarefa 12 insere as frações impróprias e números mistos para que seja possível, a partir desses conceitos, a compreensão da divisão de frações de que trata a Tarefa 13.

O terceiro capítulo traz o material do grupo de Estatística, o qual focou os trabalhos em *gráficos estatísticos* e *medidas de tendência central*. De forma semelhante ao anterior, consta um texto introdutório que discute o ensino de Estatística na Educação Básica com o intuito de situar o leitor/professor e justificar as escolhas feitas pelo grupo ao elaborar o material. Em seguida, são apresentadas orientações quanto ao encaminhamento do material em sala de aula e discutidos aspectos relacionados a possibilidades de avaliação. No que se refere às tarefas, a primeira denominada *Pacote de Balas* objetiva a compreensão do significado procedimental da Média Aritmética (algoritmo), relacionando-o com as características geométricas da média em uma representação gráfica e comparando-a com a mediana, a partir do diagrama de caixas (Box-Plot), assim como com a tabela de frequências. A segunda, a qual é denominada *Desempenho da Turma*, visa aprofundar as discussões sobre as medidas de tendência central (média, moda e mediana) com especial destaque para compreensão da média em dados agrupados, explorando o histograma e a tabela de frequências para este tipo de dado. Já a Tarefa 3, *Eleições*, explora o gráfico de setores e as relações proporcionais que o sustenta.

No quarto capítulo, o grupo de Geometria apresenta o material envolvendo conceitos relacionados à *circunferência* e *círculo*. É realizada uma discussão quanto às origens da Geometria, aspectos curriculares e a opção pelos conceitos em questão. Para nortear o trabalho do professor que se utilize do material, são enunciados o caráter e as características das tarefas,

bem como um possível processo de avaliação. Em seguida são apresentadas cinco tarefas com as respectivas orientações para o professor. A Tarefa 1 envolve a definição de circunferência; as Tarefas 2 e 3 estão relacionadas ao comprimento de circunferência; a Tarefa 4 explora a definição de círculo e a Tarefa 5 discute o cálculo da área de um círculo.

O livro, portanto, constitui um convite à reflexão sobre as possibilidades que a exploração de um *software* de Matemática dinâmica agrega aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, o qual sugere alguns caminhos para os (novos) papéis que alunos e professores podem assumir neste contexto de ensino e aprendizagem.

Os Organizadores

Capítulo 1

O SOFTWARE GEOGEBRA

Dirceu Scaldelai¹

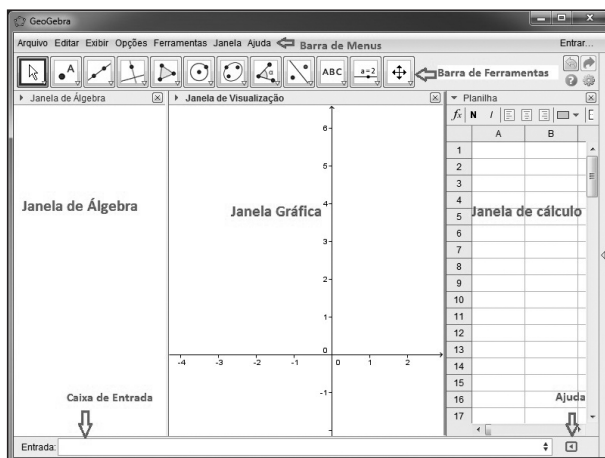
Noções iniciais e origem do software

O **GeoGebra** (aglutinação das palavras **Geometria** e **Álgebra**) é um *software* de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (do inglês, **Graphical User Interface**, ou do português **Interface Gráfica do Utilizador**). O GeoGebra é um *software* livre, disponível gratuitamente em www.geogebra.org, escrito em linguagem Java, linguagem esta orientada a objetos. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino. O projeto foi iniciado na Universidade de Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, além de ser traduzido para inúmeros países, incluindo o Brasil.

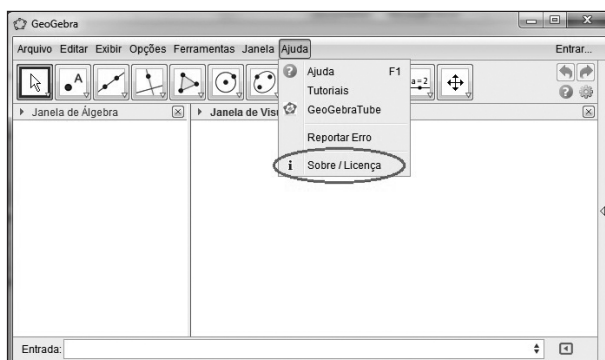
O GeoGebra possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros.

Primeiramente, caso o usuário não tenha o *software*, é preciso instalá-lo, baixando-o gratuitamente no site www.geogebra.org. Quando se abre o GeoGebra, tem-se a seguinte tela inicial:

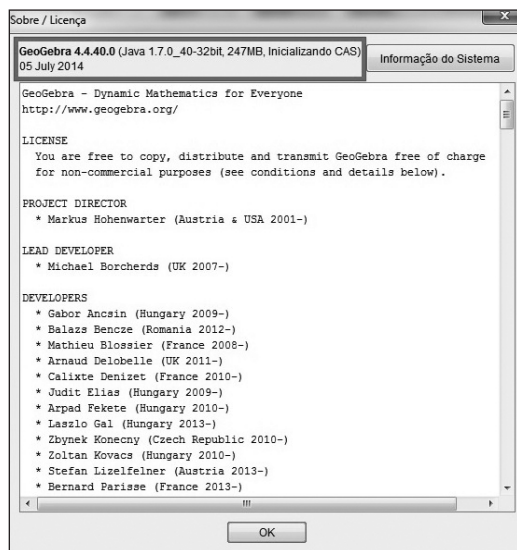
1 Professor junto ao Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *Campus* de União da Vitória e Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná (UFPR).



Um aspecto importante a ser considerando ao se trabalhar no GeoGebra é verificar a versão em que está trabalhando, tendo em conta que ele vem sendo atualizado constante e continuamente e muitas de suas ferramentas e funções têm sofrido mudanças de acordo com essas atualizações. Para tanto, procede-se da seguinte maneira. Com o GeoGebra aberto, na “Barra de Menus” selecione o menu “Ajuda”. Em seguida, selecione o submenu “Sobre/Licença”, feito isso aparecerá a seguinte janela:



A informação da versão do GeoGebra instalado estará na parte superior da janela aberta, conforme a figura:




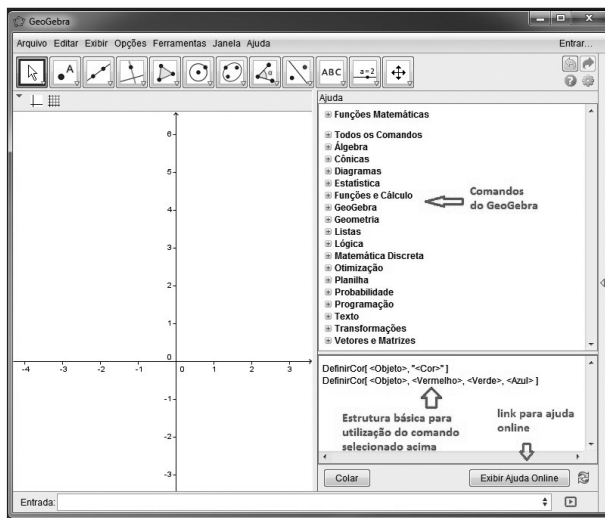
Nas tarefas que serão apresentadas e discutidas no decorrer deste trabalho é necessário ter uma versão superior a 4.2.

Cada uma das janelas do GeoGebra possibilita diferentes representações de conceitos matemáticos ou formas de explorações, por exemplo, na “**Janela Gráfica**” ou “**Janela de Visualização**” podem-se realizar construções geométricas usando apenas o mouse e as ferramentas disponíveis na “**Barra de Ferramentas**”.

Na “**Barra de Ferramentas**” estão inúmeras ferramentas para construção de diferentes conceitos geométricos. Cada ícone na barra representa uma caixa de ferramentas que contém um conjunto de ferramentas similares. Para abrir uma dessas caixas de ferramentas, deve-se clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito do respectivo ícone. Cada uma das ferramentas pode ser utilizada na janela gráfica, respeitando conceitos matemáticos. Depois de inseridos nesta janela, o GeoGebra converte a construção realizada na forma algébrica e apresenta os resultados na “**Janela de Álgebra**”.

As mesmas construções criadas utilizando o mouse e as ferramentas podem ser criadas usando a “**Caixa de Entrada**”. Nesta é possível inserir comandos que, após confirmados com um “Enter”, aparecem na “**Janela de Álgebra**”. Dependendo do tipo de informação digitada também é representada na “**Janela Gráfica**”, como pontos, funções, etc.

Caso o usuário não conheça os comandos que executam determinadas tarefas, é possível visualizá-los clicando no botão (Ajuda) , localizado no canto inferior direito da tela do GeoGebra. Ao clicar nesse ícone é aberta uma lista contendo todos os comandos disponíveis no *software* e a forma como cada um deve ser usado, além de um *link* para ajuda *online* sobre cada um dos comandos nele listado (figura abaixo).



O GeoGebra conta ainda com a “**Janela de Cálculo**”, que é similar às planilhas de cálculos das plataformas Office e BrOffice, respectivamente o “Excel” e o “Calc”. Na “**Janela de Cálculo**” do GeoGebra cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente e ser utilizada como incógnita nas expressões algébricas. Por exemplo, a célula na coluna A e linha 1 é nomeada A1. Nas células, além dos valores numéricos, podem ser inseridos todo tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra (por exemplo, coordenadas de pontos, expressões, funções, comandos), os quais podem ser plotados na “**Janela Gráfica**”. A janela de cálculos também permite a manipulação de dados e sua posterior análise estatística.

Em se tratando de um *software* dinâmico, gráficos, álgebra e tabelas são conectados dinamicamente, ou seja, cada elemento que é alterado na janela de álgebra, também sofre alteração na janela gráfica e na de cálculo e vice-versa. Este fato o torna um *software* com grande potencial para favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Por possibilitar o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos (algébricos, geométricos

e aritméticos) simultaneamente e de forma dinâmica, ele possibilita a elaboração de tarefas exploratórias que proporcionam ao aluno pensar e fazer matemática, de modo a construir e significar ideias matemáticas com certa autonomia, rompendo com o ensino pautado na “transmissão de conhecimento”. Contudo, isso envolve necessariamente uma mudança na percepção do professor sobre o processo didático e sobre sua função em meio ao processo de ensino e aprendizagem, já que ele passa a ter a função de estruturar tarefas desafiadoras e que ofereçam as condições para o engajamento do aluno na atividade, enquanto o professor media e provoca esse aluno para que as ideias sejam desencadeadas e articuladas.

Ferramentas e comandos utilizados nas tarefas

Como citado anteriormente, o GeoGebra é um *software* extremamente abrangente, com inúmeros recursos para construção de conceitos matemáticos e por isso seria desgastante percorrer sobre todas as suas funcionalidades e ferramentas. Como não temos este *intuito*, apresentamos a seguir algumas das ferramentas do *software* que serão utilizadas na execução das atividades propostas nos capítulos seguintes:



Mover

Ferramenta utilizada para arrastar objetos livres. Para isso, clica-se sobre o objeto, segura e arrasta para a posição desejada. Possui a opção de seleção de objetos.



Novo ponto

Esta ferramenta possui a finalidade de criar pontos na “**Janela de Visualização**”. Seu nome e coordenadas também são visíveis na “**Janela da Álgebra**”. É possível, ainda, criar pontos sobre objetos (retas, segmentos, polígonos, gráficos de funções, cônicas, entre outros) que ficarão dependentes. Para tal, selecione a ferramenta “**Novo ponto**”, em seguida posicione o *mouse* sobre o objeto o qual se deseja construir um ponto e clique sobre este. Este ponto criado sobre o objeto torna-se um ponto dependente do objeto. Por exemplo, seja o objeto uma reta, o ponto criado sobre a reta poderá ser movimentando apenas sobre esta, ficando dependente dela.



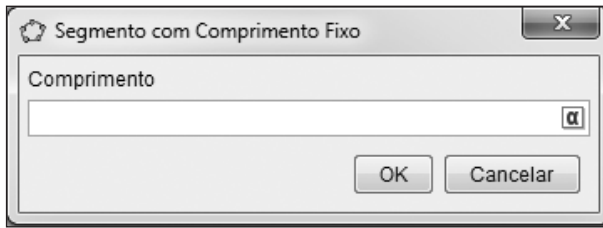
Segmento de reta definido por dois pontos

Com esta ferramenta são construídos segmentos definidos com extremidade em dois pontos, que podem já estar representados na “**Janela de Visualização**”, ou não. Caso os pontos da extremidade não existam a priori, eles são criados a partir do clique do mouse na tela onde se deseja construir o segmento.



Segmento com comprimento fixo

Com esta ferramenta são construídos segmentos a partir de um ponto já definido na “**Janela de Visualização**”. Após clicar neste ponto, abre-se a seguinte caixa de diálogo:

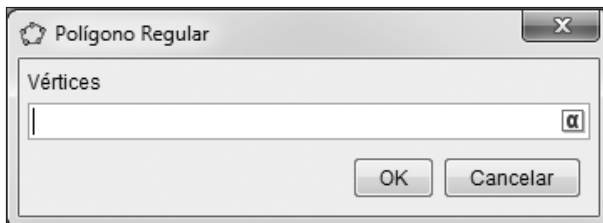


No campo “**Comprimento**”, digita-se o valor desejado para o tamanho do segmento. O segmento resultante será paralelo ao eixo x (eixo das abscissas), que pode ser movimentado posteriormente pela ferramenta “**Mover**”.



Polígono regular

A ferramenta possibilita a construção de polígonos regulares com uma quantidade previamente especificada de vértices. Ao clicar na janela gráfica, inicialmente são definidos dois pontos que servirão de base para a construção poligonal. Em seguida surge a seguinte caixa de diálogo:



No campo “**Vértices**” digita-se o número de vértices que o polígono regular terá, sendo esse um número natural maior ou igual a 3.



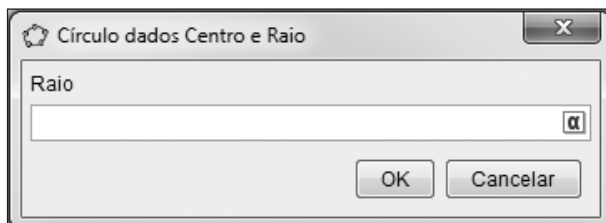
Círculo definido pelo centro e um de seus pontos

Esta ferramenta é utilizada para construir círculos e circunferências. Primeiro, define-se o ponto que servirá de centro clicando na janela gráfica, e em seguida um dos pontos que pertencerá à circunferência.



Círculo dados centro e raio

Com o auxílio da ferramenta é possível construir círculos e circunferências a partir de um ponto dado e um valor de raio. Primeiramente define-se um ponto (centro), ao clicar nele surge a seguinte caixa de diálogo:



No campo “**Raio**” digita-se o valor do raio desejado e, em seguida, clica em “**OK**” ou aperta a tecla “enter”.



Círculo definido por três pontos

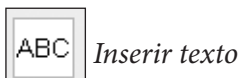
Para fazer uso desta ferramenta basta clicar em 3 pontos que o *software* calcula e traça a circunferência que passa pelos pontos.



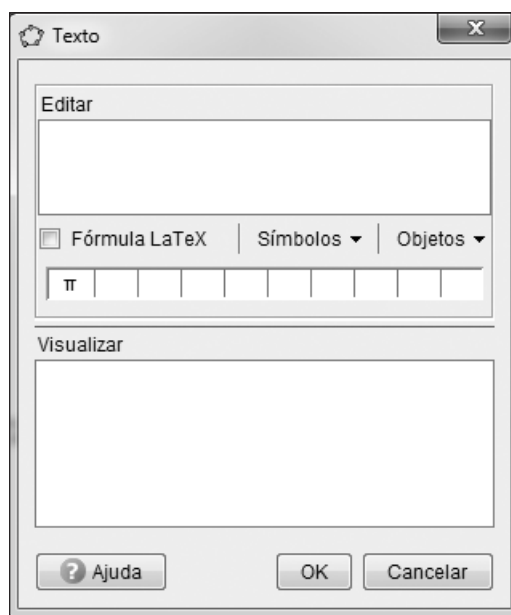
Distância, comprimento, perímetro

Com o uso desta ferramenta, podem-se fornecer distâncias entre dois pontos, duas retas ou entre um ponto e uma reta. Para tal, selecione a ferramenta “**Distância, comprimento, perímetro**” e em seguida selecione com auxílio do mouse os dois objetos (pontos, retas) que deseja calcular a distância entre eles, feito isso aparece na “**Janela de Visualização**” o valor da

distância entre os objetos. Além disso, esta ferramenta fornece comprimento de um segmento ou perímetro de polígonos e cônicas bastando apenas selecionar a ferramenta “**Distância, comprimento, perímetro**” e clicando em seguida no objeto do qual se deseja calcular o perímetro.



Esta ferramenta possibilita digitar fórmulas e textos. Para abrir a ferramenta deve-se clicar em um lugar vazio na “**Janela de Visualização**”. Aparecerá uma janela, onde se escreve o texto desejado.

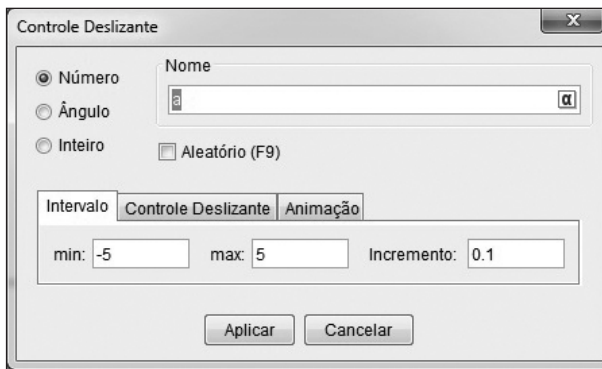


No campo “**Editar**” o usuário poderá escrever qualquer tipo de texto que desejar utilizando o teclado e pode ainda inserir símbolos da caixa de “**Símbolos**” e os valores algébricos de objetos já criados na “**Janela de Visualização**”. Além da escrita usual, há opção de usar “**Fórmula LaTeX**”, sendo que esta propicia escrever textos com base no editor “**LaTeX**” que é um sistema de preparação de documentos de alta qualidade tipográfica. Este é um sistema de preparação de documentos comum na elaboração de trabalhos científicos das áreas de ciências exatas.



Controle Deslizante

A ferramenta controle deslizante (conhecida em versões anteriores por “**Seletor**”) pode assumir o papel de uma variável, que pode ser utilizada para causar variações em objetos e funções, sendo que tal variação pode ser de forma manual ou automática. Seu dinamismo pode ser implementado nas mais diferentes situações dentro do *software*. Para criar um controle deslizante basta selecionar o mesmo na caixa de ferramenta e clicar no local desejado na janela de visualização, ao se fazer isso abrirá uma janela:



Nesta janela o usuário poderá escolher o nome da variável que o controle deslizante representará, poderá determinar em qual intervalo tal variável estará compreendida, fornecendo o valor mínimo e um valor máximo para tal, além de estipular o incremento do mesmo, ou seja, qual a sua escala de variação. Pode-se também definir se a variável é real, angular ou inteira.

Botão direito do mouse

Ao clicar com o botão direito do *mouse* sobre algum objeto da construção surge a seguinte caixa de diálogo:

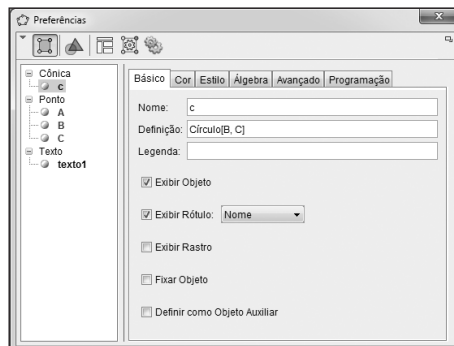


É válido salientar que, no exemplo, o objeto selecionado possui o nome: “**Função f**”.

A opção “**Exibir Objeto**” faz jus ao nome, pois se a mesma estiver ativa exibe o objeto, caso contrário, o objeto fica invisível. Quando “**Exibir Rótulo**” está ativada, aparece o nome do objeto, a sua medida ou outra legenda na “**Janela de Visualização**” junto ao objeto, de acordo com as definições empregadas no mesmo.

A opção “**Habilitar Rastro**” habilita a função rastro, sendo que ao mover um objeto na “**Janela de Visualização**” com o *mouse*, o objeto arrastado vai deixando um rastro pelo caminho que está percorrendo. Em outras palavras, o objeto vai “deixando suas pegadas por onde passa”.

As Opções “**Renomear**” e “**Apagar**” renomeiam e apagam objetos, respectivamente. A última opção que aparece quando se clica com o botão direito do *mouse* são as “**Propriedades...**” do objeto selecionado. Quando se clica nas propriedades abre um menu secundário nomeado “**Preferências**”:



Na primeira aba denominada “**Básico**”, o usuário pode renomear o objeto, mudar sua definição e acrescentar uma legenda ao mesmo. Pode determinar se este objeto será exibido na janela de visualização e qual o rótulo que será mostrado, além de habilitar a opção Rastro e ainda, dependendo do objeto, é possível habilitar a função “**Animar**”. Na segunda aba “**Cor**” pode-se alterar a cor do objeto e, dependendo de que tipo é o objeto selecionado, sua transparência. Na terceira aba temos “**Estilo**”, onde é possível alterar a espessura de linhas e formato de pontos além do preenchimento de superfícies. Na quarta aba “**Avançado**”, é possível estipular condições avançadas para exibição deste objeto e alteração de cor. E por último, tem-se a aba “**Programação**”, sendo nesta possível inserir sub-rotinas que serão executadas sob condições estipuladas pelo usuário via programação, ou seja, serão executados algoritmos escritos nesta aba.

Ressaltamos, novamente, que o objetivo desta seção é de apenas mostrar algumas das ferramentas disponíveis no GeoGebra, ferramentas estas que serão utilizadas nas atividades propostas. O *software* possui uma gama de ferramentas e comandos muito superior a apresentada neste texto, ficando a cargo do leitor, caso o interesse, se aprofundar nas aplicações do *software* GeoGebra.

Referências

GEOGEBRA: Dynamic Mathematics for Everyone, Version 4.4.43.0, 2014. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/>>.

HOHENWARTER, M. *GeoGebra Quickstart*: Guia rápido de referência sobre o geogebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_pt_PT.pdf>. Acesso em: 14 set. 2014.

Capítulo 2

FRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DE ONDE PARTIMOS E O QUE ESPERAMOS

Maria Ivete Basniak¹

Durante minha carreira de professora da Educação Básica e agora da Universidade verifiquei que o conteúdo de frações é um dentre os quais os alunos apresentam mais dificuldades. É fato que esse conteúdo acompanha o aluno durante todo seu percurso escolar e universitário, e entre as principais dificuldades se verifica a de ele não compreender o conteúdo e apenas operar as frações através de regras. Durante o desenvolvimento das atividades do subprojeto do PIBID identificamos esse mesmo problema.

Nesse sentido, o material que desenvolvemos objetiva introduzir o conteúdo frações de forma que o aluno tenha oportunidade de, através de manipulações realizadas no GeoGebra, construir os conceitos relacionados a frações e suas operações, partindo da concepção de frações como medida.

Portanto, primeiramente discutimos brevemente as concepções que as frações podem assumir, focando em segundo momento nas frações como medida. Apresentamos então os encaminhamentos para o material produzido e, por fim, algumas considerações sobre como se pode proceder em relação à avaliação das tarefas propostas.

1 Professora junto ao Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *Campus* de União da Vitória e Coordenadora de Área do PIBID do Subprojeto Tecnologias e Formações de Professores para o Ensino da Matemática. Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia (UFPR) e Doutora em Educação (UFPR).

Sobre as concepções de frações

Os números fracionários são contemplados nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná de Matemática (DCEs), dentro dos conjuntos dos números racionais.

Nas DCEs (PARANÁ, 2008), o conteúdo de frações compõe o conteúdo estruturante Números e Álgebra, no sexto ano, com o objetivo de estabelecer a relação de igualdade e transformação entre: fração e número decimal; fração e número misto, sem tratar das concepções em relação ao ensino do conceito de frações.

Os PCNs (BRASIL, 1997, p. 68) especificam que as frações devem ser trabalhadas no quarto e quinto anos do Ensino Fundamental, contemplando o ensino de frações com os significados de parte-todo, quociente, razão e como operador, com as seguintes abordagens:

- Fração como parte-todo (ou medidas): quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes;
- Frações como quociente: baseia-se na divisão de um número natural por outro ($a \div b =$);
- Fração como razão: a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza;
- Fração como operador: desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

No desenvolvimento deste material tomamos a primeira abordagem por entendermos ser a mais adequada para a construção do conceito de fração pelo aluno e entendemos não ser apropriado tratarmos das outras concepções ao mesmo tempo, por acreditarmos que o aluno precisa primeiro construir o conceito de fração nesta abordagem, apropriando-se do mesmo e conseguindo operar a partir deste conceito, para conseguir posteriormente compreender que a mesma representação (fração) pode assumir diferentes significados. Percebemos que este pode ser o motivo da primeira dificuldade do aluno em compreender as frações, pois em muitos casos sem ter sido introduzida ainda a álgebra e sem grande capacidade de abstração é difícil que o aluno consiga entender como uma representação pode assumir quatro diferentes significados.

A seguir, discutimos um pouco mais sobre o que se refere a fração como medida, a qual segue do desenvolvimento histórico das frações.

Frações como parte/todo (medida)

Caraça (1998, p. 30) lembra que “medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência”. Para o autor, essas ações podem ser verificadas no cotidiano da dona de casa quando faz provisões, do engenheiro ao fazer projetos, e nas mais diversas profissões.

Medir está relacionado a comparar. O que não parece ser difícil de perceber, pois sempre que fazemos uma medição estamos tomando como referência uma unidade a qual comparamos o que desejamos medir. O que nos permite inclusive expressar as medidas de diferentes formas, dependendo da unidade de medida em que realizamos a comparação. Segundo Caraça (1998, p. 30), medir consiste de três fases e três aspectos distintos: “escolha da unidade, comparação com a unidade e expressão do resultado dessa comparação por um número”. Quando desejamos medir nossa altura, por exemplo, primeiro escolhemos a unidade de medida, que pode ser expressa em metros, centímetros, polegadas entre inúmeras outras. No segundo momento, realizamos a comparação entre nossa altura com essa unidade para, por último, expressarmos nossa altura que pode ser 1,60 metros ou 160 centímetros, que embora seja representada de forma diferente, não altera a medida de nossa altura, apenas a forma de representá-la.

Nessa concepção, quando trabalhamos com frações, essas mesmas fases são sempre seguidas, mas ao usar frações criamos nossa própria unidade de medida, que consiste em dividir igualmente o todo em tantas partes. Assim, a primeira fase consiste em dividirmos o todo em partes iguais para termos nossa unidade de medida. Em seguida, usamos essa unidade para podermos realizar comparações e, assim, dizemos que do todo dividido em **b** partes tomamos **a** dessas partes. Por fim, convencionou-se que para expressarmos esse resultado seria utilizada a representação de fração da forma $\frac{a}{b}$, sendo **a** e **b** números naturais, e **b** diferente de zero, em que **b** expressa o número de divisões do todo em partes iguais e é chamado denominador da fração e **a** expressa o número de partes tomadas desse todo e é chamado de numerador da fração. Embora **a** e **b** sejam números naturais, ao assumir essa representação nessa concepção, eles formam um novo número chamado racional.

Encaminhamentos do material

A partir das possibilidades que o GeoGebra² apresenta para explorar conteúdos matemáticos através da manipulação de suas ferramentas, o material foi construído para que o aluno consiga realizar as tarefas com certa autonomia. Entretanto, isso não exclui o professor do processo de aprendizagem, que tem papel de mediador, sendo sua interferência essencial em alguns momentos para que o aluno obtenha êxito. Dessa forma, o professor deve auxiliar o aluno na construção de seu conhecimento, estando atento durante a realização de todas as tarefas, questionando-o sobre as suas conclusões, propondo novas questões quando as propostas no material forem insuficientes para que consiga realizá-las, estimulando os alunos no desenvolvimento das mesmas e promovendo a socialização das diferentes respostas dos alunos e, a partir destas, formalizando o conteúdo. Todas as tarefas lembram o aluno que sempre que precisar deve pedir auxílio ao professor.

O material do aluno é composto por 13 tarefas. Na *Tarefa 1*, tomamos os pressupostos históricos que levaram ao surgimento dos números racionais para introduzir o conceito de frações, a fim de que o aluno compreenda que quando desejamos fazer medições, em muitas situações, os números naturais são insuficientes, o que levou ao surgimento dos números racionais. A intenção é que através da manipulação das cordas (segmentos de reta) disponibilizadas no arquivo, o aluno perceba essa situação, ou seja, que nem sempre os números naturais são suficientes para realizar medições, pois dependendo da unidade de medida tomada, a comparação com o todo pode não resultar em um número inteiro. As questões propostas admitem diferentes respostas dos alunos, ou ainda, podem levá-los a outras perguntas além das propostas. Assim, o professor pode complementar a tarefa com vídeos que apresentem um pouco desta história, como, por exemplo, o *quiz* da TV Escola sobre frações³.

A Tarefa 2 complementa a primeira permitindo que o aluno, através do controle deslizante, manipule o tamanho da corda a fim de verificar em quantas partes iguais esse segmento precisa ser dividido para que caiba um número inteiro de vezes dentro do todo, e assim, possa saber, além das três cordas inteiras, que pedaço dessa corda precisa tomar para completar a

2 Vide Capítulo sobre o GeoGebra.

3 Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Z0Wcmr_xWj4

medição da sala. Nessa atividade é apresentado o conceito formal de fração definida como a/b . Embora saibamos que isso é bastante abstrato ao aluno do quarto ou quinto ano, acreditamos que a iniciação a álgebra através deste conceito se faz necessária, uma vez que durante as demais tarefas ao manipular o controle deslizante verificará a mudança de valores que ocorre e, dessa forma, vemos aí uma oportunidade para iniciar o aluno às representações algébricas. Entretanto, destacamos a necessidade de o professor estar atento à dificuldade do aluno em compreender essa generalização, o que requer que, dependendo da reação dos alunos, questões auxiliares sejam propostas. Nesse sentido, evidenciamos que o que precisa ficar claro ao aluno é que o denominador é a quantidade de vezes em que o todo foi igualmente dividido e o numerador as partes que consideramos desse todo, e que essa representação diz respeito a um novo número, chamado fracionário.

A *Tarefa 3* tem como objetivo colaborar para esse compreensão, e permite o professor verificar se essa intenção foi alcançada, visto que na *Tarefa 2* o aluno pode facilmente verificar que segmento foi dividido na metade. Já a *Tarefa 3* não pode ser percebida sem a manipulação do controle deslizante.

A *Tarefa 4* é uma introdução à comparação de frações que será retomada na *Tarefa 5*. Mas, além disso, pretende que o aluno perceba que nem sempre o numerador da fração será um, visto que até então todas as tarefas sempre levaram a tomar uma parte do todo dividido igualmente. Assim, há a necessidade de o professor atentar ao fato de que a parte marrom corresponde à fração do chocolate que cada amigo receberá, e a parte azul é o que resta após um amigo receber sua parte. Entretanto, essa será dividida entre os outros amigos e, portanto, quando todos os amigos receberem sua parte, não sobrá nada do chocolate.

Na *Tarefa 5* esperamos que o aluno consiga concluir, através da atividade, que quando possuem o mesmo numerador a fração menor será a que possui o maior denominador, pois o todo será dividido em mais partes, ficando a parte tomada menor. Vale ressaltar que os alunos podem apresentar dificuldades em relação aos símbolos de maior ($>$) e menor ($<$), cabendo ao professor relembrar a forma correta de operar com esses símbolos. A última questão proposta nesta tarefa pretende mostrar a importância da equivalência entre frações, que será tratada na tarefa seguinte. Deixamos claro que não é possível o aluno generalizar, apenas através do preenchimento da tabela, como identificar qual fração é maior ou menor sem a equivalência

de frações. O que normalmente é realizado para esse tipo de fração é tomá-las como quociente. Entretanto, descartamos essa possibilidade aqui, visto que a intenção é trabalhar com frações a partir da concepção de medida, e acreditamos que realizar a divisão do numerador pelo denominador para encontrar um número decimal, já nesse momento, poderia levar o aluno a problemas conceituais. Por tal motivo, aconselhamos o professor a trabalhar em outro momento com essa forma de comparação e realizar na sequência a *Tarefa 6*, que trata de equivalência, para retomar essa tabela depois e comparar as frações através de equivalência. Portanto, objetivamos através da *Tarefa 6* que o aluno compreenda que uma mesma quantidade do todo pode ser representado por diferentes frações.

Já a *Tarefa 7*, que utiliza o mesmo arquivo do GeoGebra, insere a adição de frações com mesmo denominador. Objetivamos que através da manipulação das peças os alunos percebam que o todo é mantido e, portanto, os denominadores não são somados. Apenas os numeradores das frações é que são somados. Da mesma forma, a *Tarefa 8* pretende que o aluno compreenda a subtração de frações com denominadores iguais.

A *Tarefa 9* retoma o conteúdo de frações equivalentes que será necessário para introduzirmos soma de frações com denominadores diferentes na *Tarefa 10*.

A *Tarefa 10* requer que o professor fique atento à habilidade dos alunos em entender como os controles deslizantes funcionam. Buscamos inserir itens (1 e 2) que permitam essa compreensão, mas caso o professor perceba que os alunos não compreenderam como os mesmos funcionam, sugerimos realizar outras discussões a fim de que consigam posteriormente compreender a soma através da manipulação desses controles. Tendo compreendido esta parte, espera-se que os alunos entendam a soma de frações de denominadores diferentes, encontrando frações equivalentes para as frações dadas que tenham o mesmo denominador, ou seja, em que o todo seja dividido na mesma quantidade de partes. Normalmente o que ocorre são as somas de frações serem trabalhadas através do cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) sem significado para o aluno. Assim, optamos por inserir o conteúdo através de frações equivalentes por acreditarmos ser mais fácil de o aluno compreender. Para se realizar a soma de frações com denominadores diferentes, o que fazemos é deixar os denominadores iguais, pois precisamos ter o todo dividido na mesma quantidade de partes iguais, para que possamos juntar essas quantias. Caso o professor deseje,

pode, posteriormente à realização dessas tarefas, trabalhar com a soma de frações através do m.m.c., relacionando inclusive ao que foi trabalhado nesta tarefa. A subtração de frações com denominadores diferentes segue o mesmo processo, podendo o professor elaborar questões que permitam o aluno compreender esse conteúdo.

Na *Tarefa 11* propomos a multiplicação de frações a partir do cálculo de área. Assim, inicialmente relembramos brevemente o conteúdo área, para em seguida propor a tarefa a fim de que o aluno consiga no final da mesma concluir como se realiza a multiplicação de frações, em que tanto os numeradores quanto os denominadores são multiplicados.

A *Tarefa 12* pretende que os alunos compreendam que em algumas situações a quantidade de partes que tomamos da fração (numerador) é maior que a quantidade de partes em que um todo foi igualmente dividido e, dessa forma, podemos tomar partes de mais que um todo, entretanto, todos divididos em uma mesma quantidade de partes iguais, cuja representação pode ser feita através de frações impróprias (em que o numerador é maior que o denominador) ou números mistos. A necessidade de trabalhar com número misto surgiu para que o aluno possa compreender melhor a divisão de frações, que é trabalhada na última tarefa do material, na *Tarefa 13*.

A forma que consideramos mais apropriada para inserir o conteúdo de frações, a fim de que o aluno compreenda que está operando em outro campo numérico diferente dos naturais, e por isso muitas vezes ao dividir duas frações pode encontrar como resultado uma fração maior que a que está dividindo, é remetermos a divisão de frações à ideia de que dividir também pode ser entendido como a quantidade de vezes que uma parte cabe em outra. Portanto, apresentamos uma introdução à tarefa lembrando as diferentes questões que nos remetem a uma divisão. Em seguida, são colocadas várias questões a fim de que o aluno compreenda em que consiste a divisão de frações. Assim, através dessa tarefa, o aluno dificilmente conseguirá chegar à “regra” usada para efetuar cálculos com divisão de frações, a qual não é intenção do material. Porém, caso deseje, o professor pode tentar, através da repetição de exercícios com o arquivo no GeoGebra, que o aluno observe as divisões efetuadas e seus resultados para verificar que coincidem com o método obtido através das propriedades operatórias da divisão de frações.

Desta forma, destacamos mais uma vez que o objetivo do estudo de frações através do presente material não é que ao final o aluno seja capaz de operar com frações da forma que usualmente ocorre durante as aulas, mas, que compreenda que as frações referem-se a um novo campo numérico diferente dos naturais e, por isso, os resultados obtidos quando operamos com frações não são os mesmos esperados nos naturais, pois enquanto contamos com os números naturais, com as frações podemos realizar medições.

Avaliação

A avaliação é necessária à prática educativa e indissociável desta, pois permite ao professor verificar se os objetivos de sua aula estão sendo atingidos ou não e, por outro lado, permite ao aluno saber como está seu desempenho do ponto de vista do professor e quais os pontos que ele não compreendeu bem e, portanto, precisam ser revistos.

Para Pavanello e Nogueira (2006) a avaliação está relacionada à concepção que temos da Matemática, com consequentes implicações pedagógicas sobre “*o que ensinar, por que ensinar, para quem ensinar, como ensinar*”.

Uma vez que ao produzir esse material tomamos a Matemática como produção humana, “construída a partir de necessidades impostas pela realidade num determinado contexto histórico e social”, entendemos, de acordo com as autoras acima citadas, que “o processo de *ensinar/aprender matemática* passa a ser concebido como aquele no qual o aprendiz constrói o conhecimento a partir de sua própria atividade cognoscitiva, atividade esta que se apoia nos conteúdos” (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 36).

Dessa forma, a avaliação não é algo que ocorre somente ao final do processo, como se fosse uma etapa a ser cumprida. Ao contrário, deve acompanhar todo o processo de ensino e aprendizagem, considerando os erros dos alunos como importantes para os encaminhamentos das próximas tarefas a serem realizadas. Pavanello e Nogueira (2006, p. 38) destacam que para que isso ocorra é necessário reconhecer que:

A avaliação em matemática, sob essa perspectiva, deve se preocupar fundamentalmente com essas atitudes, as quais só podem ser detectadas mediante a observação atenta, pelo professor, de seus alunos, enquanto realizam as tarefas que lhes foram determinadas. Esse

acompanhamento deve ser conduzido de modo seletivo, de maneira que a atenção do professor recaia sobre um aluno ou grupo de alunos de cada vez. Como se trata de observar atitudes, o professor não pode assumir uma postura passiva; ao contrário, deve dialogar com os alunos para melhor compreender seus processos de pensamento e intervir quando necessário.

Assim, o objetivo fundamental do material é que o aluno se aproprie dos conceitos de frações a partir da concepção de medida. O que se espera é que esse conceito seja construído durante o desenvolvimento das atividades, o que deve ser verificado pelo professor através do acompanhamento do desempenho do aluno durante a realização das tarefas, devendo sempre que necessário intervir tornando as tarefas mais adequadas e claras a cada aluno. Se o aluno demonstrar que compreendeu esse conceito através da realização das atividades, sendo capaz de realizar outras similares que podem ser sugeridas pelo professor, entendemos que as tarefas atingiram os objetivos propostos, permitindo que os alunos compreendessem o conceito de frações, como parte/todo (medida). Caso contrário, o professor deverá buscar outras estratégias de ensino que favoreçam a aprendizagem dos alunos, a fim de atingir os objetivos almejados.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2014.

FRAÇÃO – Quiz TV Escola. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Z0Wcmr_xWj4>. Acesso em: 21 set. 2014.

CARAÇA, Bento de Jesus de. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática*. Paraná: 2008. Disponível em: <<http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/File/matematica.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2014.

PAVANELLO, Regina Maria; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Avaliação em Matemática: Algumas Considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

FRAÇÕES: uma nova ideia de número

André Rafael Liziero

Carlos Krassowski Filho

Cláudia Tratch

Édino Andrioli

Germano Vier Alves

Maria Ivete Basniak

Norberto J. Polsin Jr.

Sandra Regina Kimak

Simão Nicolau Stelmastchuk

Victor H. G. Martinez

Para entender o que são frações, como surgiram e como podemos realizar operações com elas, leia e realize as tarefas com atenção. Sempre que precisar peça ajuda ao professor.


Tarefa 1

“Uma professora propôs aos seus alunos que medissem o comprimento da parede do fundo da sala, no entanto não havia ferramentas métricas, apenas pequenas cordas com o **mesmo** comprimento”.

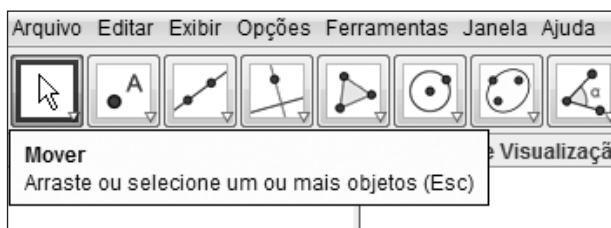
Como seria possível descobrir o comprimento da parede do fundo da sala? Lembre-se, você só tem as cordas do **mesmo tamanho**.

Para responder a questão, com a orientação do seu professor, abra o documento “**Tarefa1.ggb**”. Observe que neste arquivo está disponível a planta da sala de aula.

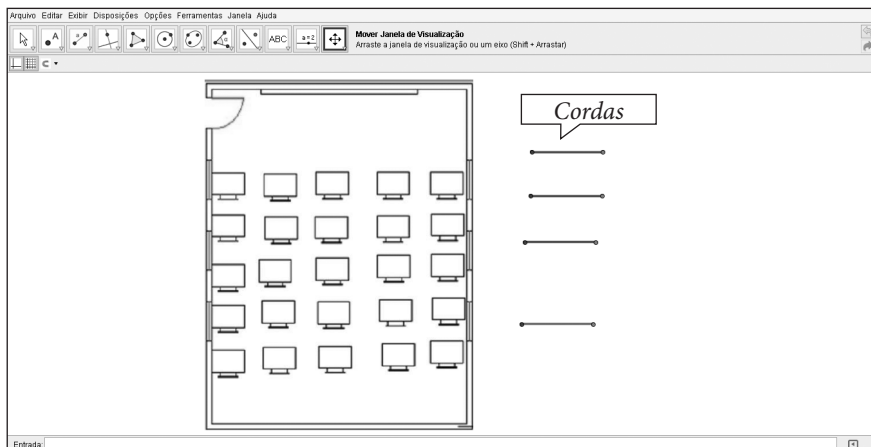
Ao lado, você tem cordas de tamanhos iguais que você vai usar para medir o comprimento do fundo da sala.

Com a ferramenta mover  selecionada, clique sobre a corda e arraste para descobrir quanto mede essa parede e responda:

Os alunos devem ser orientados a mover os segmentos (as cordas) unindo ponto com ponto, sem haver sobreposição de segmentos. Para movê-los é preciso, primeiramente, selecionar a ferramenta mover.



Deve-se clicar sobre o ponto da esquerda do segmento arrastando na parede do fundo da sala.



- 1) Quantas cordas você utilizou para medir o fundo da sala?

Os alunos podem responder que couberam três cordas e faltou um pedaço, ou quatro e sobrou um pedaço.

Você deve ter percebido que não é possível dizer quantas cordas inteiras foram necessárias para medir a parede do fundo da sala.

Os primeiros números construídos foram os números **Naturais**. Eles foram criados com a ideia de contar e enumerar. No entanto, quando precisamos fazer medições, os **Naturais** são insuficientes, como verificamos ao fazer a medição do fundo da sala com as cordas.

Há muitos anos, a mesma dificuldade foi enfrentada por nossos antepassados ao fazerem uma medição parecida com a que tentamos fazer. Frente a isso, foi preciso criar novos números, **as frações**, que possibilitam medir partes do todo. Então:

- 2) Como será que nossos antepassados resolveram seu problema? E no nosso caso, o que deve ser feito com a corda para medir essa parte da parede que falta?

Espera-se que respondam que precisaríamos tomar parte da corda ou dividi-la para conseguir medir. Caso não respondam, pode-se questioná-los: O que se pode fazer com a corda para obter uma menor?

Tarefa 2

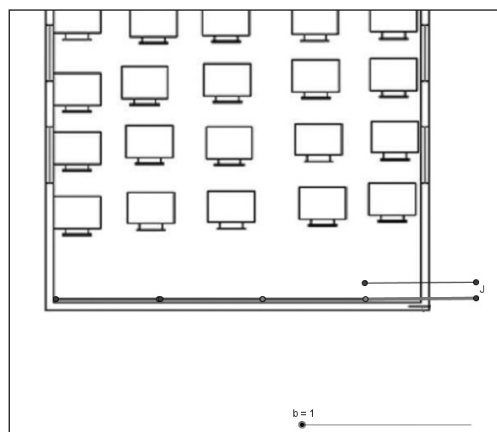
Abra o documento do GeoGebra “**Tarefa2.ggb**”. Observe que as três cordas já estão posicionadas no fundo da sala. A quarta corda está representada ao lado das outras, em cor vermelha.

Movimentando o controle deslizante, você pode ver em quantas partes iguais a corda pode ser dividida. Movimente-o, observe e responda:

- 1) Como podemos fazer a divisão da corda para **concluir** a medição?

O segmento em vermelho é o quarto segmento dividido em b partes iguais e o valor de b pode ser alterado com o controle deslizante. Para isso, basta selecionar a ferramenta mover, clicar e arrastar o controle deslizante.

Aqui o aluno deve observar que é preciso dividir a corda em duas partes iguais, ou seja, na metade.



Você pode perceber que o valor de **b** altera o tamanho da quarta corda. Quando você estabelece $b = 2$, tem-se a metade do segmento, com $b = 3$, tem-se o segmento dividido em três partes iguais, ou seja, a terça parte.

Assim, dividindo a corda em partes iguais, foi possível encontrar um pedaço que coube na parte da sala que restou.

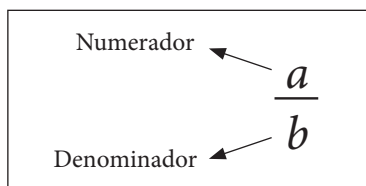
Portanto, dividindo o todo (a corda) em partes iguais, conseguimos com uma parte desse todo, ou seja, a metade da corda concluir a nossa medição.

A palavra metade pode ser representada pela fração um meio como: $\frac{1}{2}$ ou $1/2$.

O “2” representa em quantas partes iguais o todo foi dividido e o 1 representa quantas partes dessa divisão utilizamos.

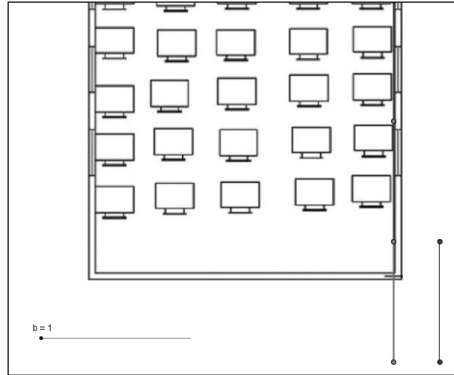
Assim, as frações são representadas de forma genérica como $\frac{a}{b}$, onde **b** é o valor que divide o todo em partes iguais e o valor de **a** representa as partes que tomamos dessa divisão.

São estabelecidos nomes para cada uma dessas partes do número racional:



Tarefa 3

Abra o arquivo: “*Tarefa3.ggb*”. Veja que foram colocadas 3 cordas inteiras para medir o lado da sala e sobrou um pedaço de sala, ou seja, faltou um pedaço de corda para completar a medição.



- 1) Movimente o controle deslizante e encontre a fração que representa o pedaço de corda que faltou para completar a medição da parede do lado da sala.

O encaminhamento pode ser similar ao anterior. A fração encontrada será $\frac{1}{4}$.

Tarefa 4



Certo dia, Joãozinho levou para a escola uma barra de chocolate, quando abriu a barra viu que era ao leite, que ele não gostava. Como não queria jogar fora uma barra de chocolate, Joãozinho então pensou em dividir a barra em partes iguais com seus amigos. Assim, ele começou a imaginar como seria a divisão. Joãozinho tem **12** amigos, mas não sabe ainda quantos iriam para a aula nesse dia, pois estava chovendo muito. Portanto, ele terá que pensar em várias possibilidades de como dividir igualmente o chocolate com seus amigos, pois a divisão da barra dependerá da quantidade de amigos que tiverem ido para a escola nesse dia. Como não temos essa informação, representamos o número de amigos por **b**.

Com a orientação do seu professor abra o arquivo “*Tarefa4.ggb*” e ajude Joãozinho a resolver o problema acima. Para isso, mova o controle deslizante e observe o valor do **b** (número de amigos).

- 1) O que acontece com a barra de chocolate?

*Espera-se que o aluno responda que conforme o valor de **b** aumenta (ou seja, à medida que ele tem mais amigos) menor fica o pedaço que cada um recebe.*

Recordando os nomes das partes de uma fração, lembramos que o denominador representa em quantas partes iguais o todo foi dividido e o numerador, a parte que foi tomada desse todo.

- 2) Em relação ao problema acima, **b** representa o numerador ou o denominador?

O denominador.

- 3) Complete a tabela com as frações que podem ser representadas pelo pedaço de chocolate marrom, correspondente ao pedaço da barra de chocolate que cada amigo de Joãozinho que comparecer a aula receberá. E azul, que representa a parte que será dividida entre os demais amigos de Joãozinho. Lembrando que cada um deles receberá um pedaço do mesmo tamanho, correspondente à fração representada.

Represente em frações		
Valor de b (amigos)	Marrom	Azul
0	Inexistente	Inexistente
1	1	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$
11	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$

Tarefa 5

Com o auxílio do seu professor abra o arquivo do GeoGebra “*Tarefa5.ggb*”.



- 1) Mova o controle deslizante **a** (marrom) e o controle deslizante **b** (vermelho). Observe e complete o quadro:

Fração que representa a parte marrom	Compare e utilizando os símbolos = > <	Fração que representa a parte vermelha
$\frac{1}{2}$	>	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{7}$	<	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{1}$	>	$\frac{1}{10}$

Os valores aqui são aleatórios. Os alunos poderão colocar outros.

- 2) Sem olhar para os retângulos coloridos, observando apenas os dados presentes no quadro, é possível dizer qual é a maior fração? De que forma?

Espera-se que o aluno perceba que, no caso de frações com numerador 1, quanto maior o denominador, menor será a área dos retângulos e, conseqüentemente, menor será a fração.

- 3) Divida novamente os retângulos em tamanhos diferentes e preencha o quadro:

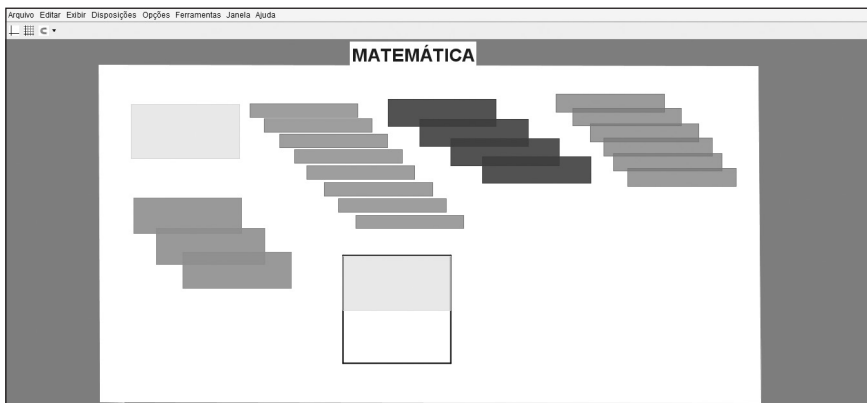
Fração que representa a parte verde	Compare e utilizando os símbolos = > <	Fração que representa a parte azul
$\frac{1}{2}$	<	$\frac{7}{8}$
$\frac{2}{3}$	<	$\frac{6}{7}$
$\frac{3}{4}$	<	$\frac{11}{12}$
$\frac{4}{5}$	>	$\frac{2}{3}$

Os valores aqui são aleatórios. Os alunos poderão colocar outros.

- 4) Sem olhar para os retângulos coloridos, é possível dizer qual é a maior fração, utilizando a mesma estratégia da questão anterior?

Difícilmente o aluno conseguirá responder afirmativamente essa questão, uma vez que “a regra” estabelecida anteriormente serviria para ordenar estes números. Pode-se orientar os alunos para que comparem o tamanho de algumas combinações, e questioná-los se será possível obter tamanhos iguais de peças, introduzindo com a tarefa 6 o conceito de frações equivalentes.

Tarefa 6



- 1) Com a ajuda do professor, abra o arquivo “*Tarefa6_7_8.ggb*” e realize as tarefas a seguir.

Qual é a fração que uma peça de cada cor representa?				
Amarelo	Verde	Azul	Laranja	Lilás
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Caso os alunos apresentem dificuldade em lembrar o que é o denominador e o numerador, pode-se utilizar a tarefa acima para realizar esta retomada, durante a construção e correção do quadro.

- 2) Insira um retângulo amarelo no quadrado branco e observe que este representa a metade da área do quadrado, ou seja, $\frac{1}{2}$. Depois, arraste figuras de uma mesma cor sobre o retângulo amarelo, a fim de cobri-lo completamente. Com quais cores é possível cobrir perfeitamente o retângulo amarelo?

Azul e verde.

- 3) Com quais cores não é possível cobrir perfeitamente o retângulo amarelo?

Laranja e lilás.

- 4) As quantidades de figuras que cobrem perfeitamente o retângulo amarelo e podem ser representadas por frações, dizemos que são equivalentes ao retângulo amarelo, ou seja, à metade. Sabendo disso, quais frações são equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Espera-se que os alunos respondam que a cor azul representa a fração $\frac{2}{4}$ e a cor verde, representa $\frac{4}{8}$. Com estas conclusões o professor pode auxiliar os alunos a perceberem a relação de proporcionalidade existente entre estas frações:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Caso os alunos apresentem dificuldades na representação das frações, o professor pode auxiliá-los, colocando a representação das frações na lousa e pedindo que manipulem o GeoGebra observando as equivalências:

$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{4} = \frac{\square}{\square}$$

Agora que você já sabe que frações equivalentes representam a mesma quantidade em relação ao todo e que, no arquivo “*Tarefa6_7_8.ggb*” as cores representam diferentes frações em relação ao todo, ao sobrepor uma cor sobre outra, podemos encontrar frações equivalentes.

5) Escreva as frações que representam os pares de cores a seguir e verifique se são equivalentes.

a) Amarela e Azul.

São equivalentes. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

b) Lilás e Amarela.

São equivalentes. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

c) Amarela e Verde.

São equivalentes. $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

d) Verde e Laranja.

Não é equivalente. $\frac{x}{8} \neq \frac{1}{3}$

e) Azul e Verde.

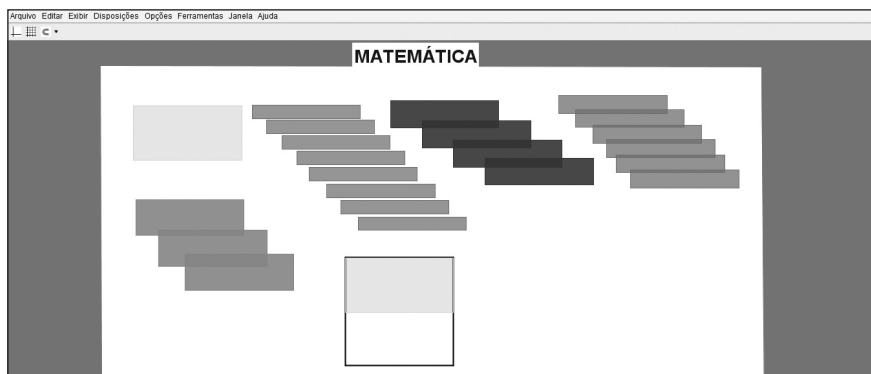
São equivalentes. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

f) Laranja e Lilás.

São equivalentes. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Tarefa 7

Deverá ser utilizado o mesmo arquivo do GeoGebra da tarefa 6 intitulado “*Tarefa6_7_8.ggb*”.



Com a ajuda do professor, abra o arquivo “*Tarefa6_7_8.ggb*” e realize as tarefas a seguir.

Sabendo que cada peça pode ser representada por uma fração, responda:

- 1) Se colocarmos três peças azuis dentro do quadrado (todo), qual é a fração que essas peças azuis representam?

$$\frac{3}{4}$$

- 2) Se colocarmos cinco peças lilás dentro do quadrado (todo), qual fração representa essas peças lilás?

$$\frac{5}{6}$$

- 3) Se uníssemos cinco peças lilás dentro do quadrado, que fração será representada?

$\frac{5}{6}$ ou $\frac{1}{6}$. Cabe ao professor argumentar sobre a resposta, a qual depende da cor a se observar.

- 4) Resolva as operações a seguir com o auxílio do arquivo “**Tarefa6_7_8.ggb**”:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$

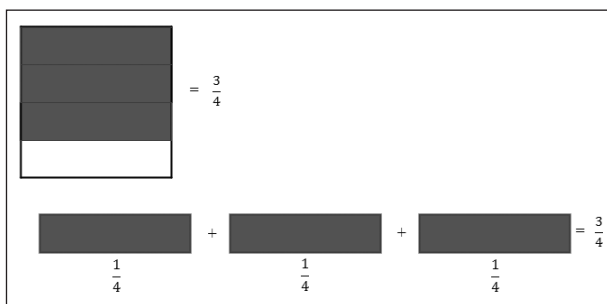
d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$

e) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$

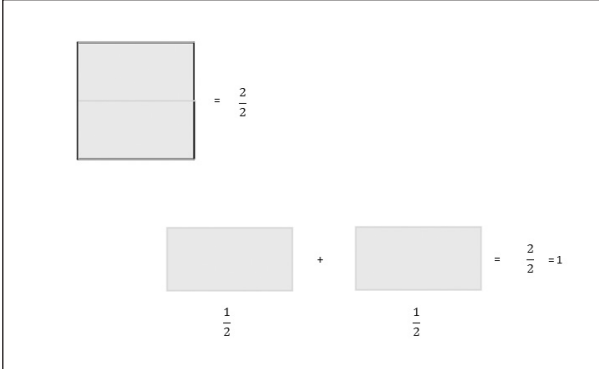
f) $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$

Segue as respostas esperadas do exercício 4.

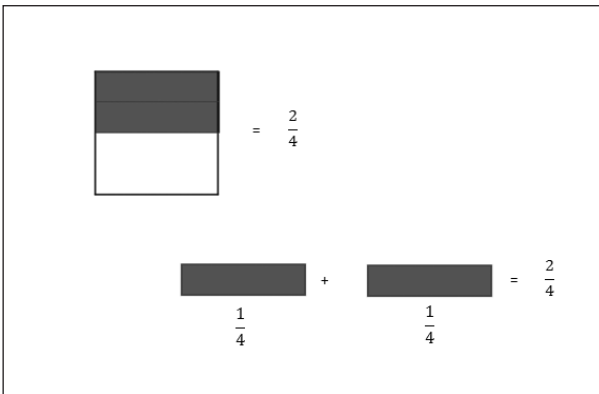
a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



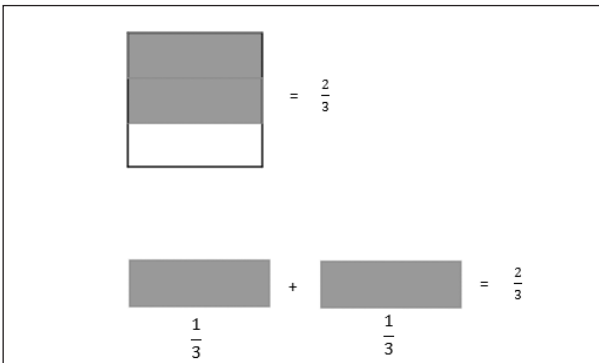
$$b) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



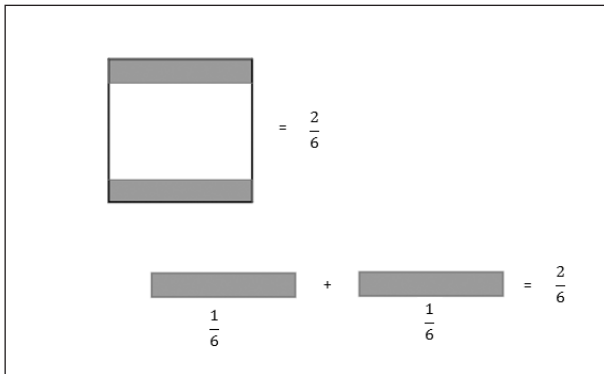
$$c) \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



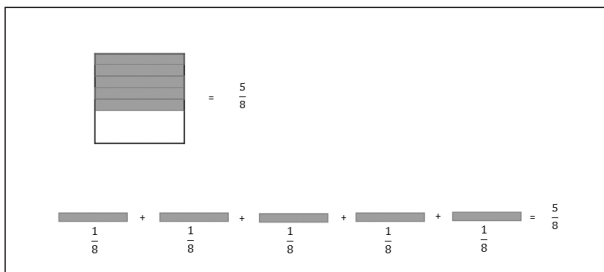
$$d) \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



e) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



f) $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$



g) Explique como você realizou estas somas:

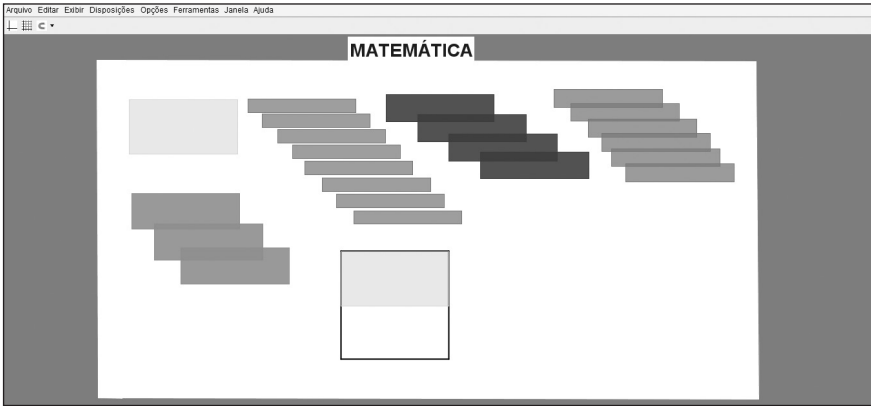
Espera-se que os alunos respondam que para obter o numerador contam-se as peças que foram arrastadas para dentro do quadrado (todo). O denominador, como já foi visto, será a quantidade de peças iguais que cabem neste quadrado, ou em quantas partes o todo foi dividido.

- 5) Sem o auxílio do arquivo com as imagens, como você realizaria estas somas?

Espera-se que os alunos respondam que, somando o numerador e repetindo o denominador.

Cabe ressaltar a diferença entre os conjuntos numéricos trabalhados, estando os alunos iniciando seus estudos com os números racionais, cuja forma de operar é diferente dos naturais, que é evidenciada pelo fato dos denominadores não serem somados.

Tarefa 8



Com a ajuda do professor, abra o arquivo “*Tarefa6_7_8.ggb*” e realize as tarefas a seguir.

Sabendo que cada peça pode ser representada por uma fração, responda:

- 1) Se preenchermos o quadrado com peças azuis, qual é a fração que representa essas peças? Agora retire uma peça, qual fração representa o que restou?

$$\frac{4}{4}, \text{ restou } \frac{3}{4}.$$

- 2) Se preenchermos o quadrado com a cor lilás qual será a fração que representa essas peças? Retire quatro destas peças e responda qual fração representa o que restou?

$$\frac{6}{6}, \text{ restou } \frac{2}{6} \text{ ou } \frac{1}{3}.$$

- 3) Resolva as operações a seguir com o auxílio do arquivo “*Tarefa6_7_8.ggb*”:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$

d) $3/3 - 1/3 = 2/3$ $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

f) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

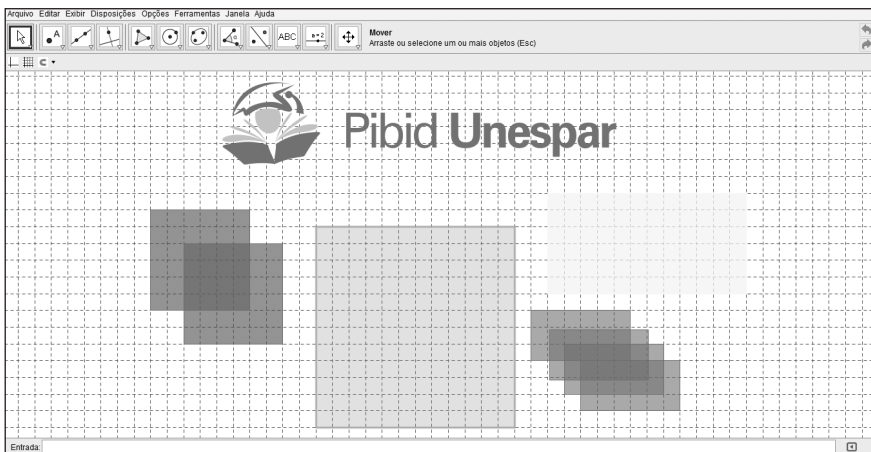
- 4) Explique como você realizou as subtrações?

Espera-se que os alunos respondam que para obter o numerador contam-se as peças que restaram no quadrado (todo) após as respectivas retiradas. O denominador, como já foi visto, será a quantidade de peças iguais que cabem neste quadrado, ou em quantas partes o todo foi dividido.

- 5) Sem o auxílio do arquivo com as imagens, como você realizaria essas subtrações?

Espera-se que os alunos respondam que subtraindo o numerador e repetindo o denominador.

Tarefa 9



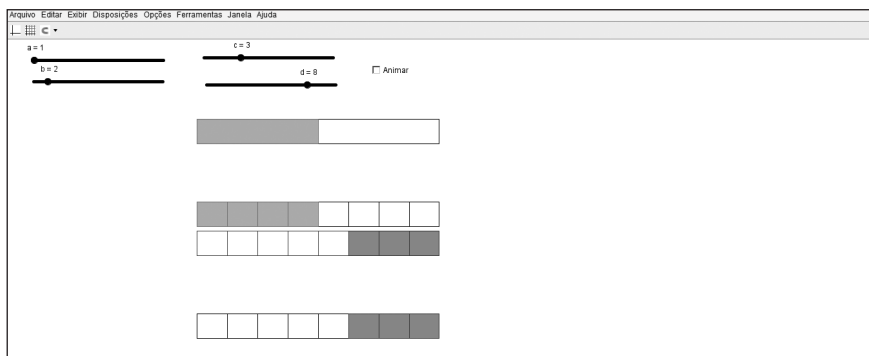
Com o auxílio do professor abra o arquivo do GeoGebra “**Tarefa9**” e realize as tarefas a seguir.

- 1) Cada figura está nomeada com sua respectiva fração. É possível representá-las com outras frações? Se sim, explique como?

Espera-se que, com o auxílio da malha e com a sobreposição de peças, os alunos consigam encontrar frações equivalentes de cada cor.

- 2) Como se chamam frações que apresentam o mesmo valor?
Equivalentes.
- 3) Sabendo que as peças verdes podem sobrepor as vermelhas, é possível somar uma peça verde com uma vermelha? E com as outras cores? Explique:
Neste momento espera-se que o aluno perceba que podemos somar frações com denominadores diferentes encontrando frações equivalentes que possuam denominadores comuns.

Tarefa 10



Com a ajuda do professor, abra o arquivo “*Tarefa10.ggb*”, mova os controles deslizantes e observe o que ocorre com as frações. Realize as seguintes tarefas:

- 1) O que acontece quando os controles **b** e **d** são manipulados?
A divisão do todo em partes iguais aumenta ou diminui, ou seja, se altera.
- 2) Associe os controles deslizantes **a**, **b**, **c** e **d** a o que eles representam das frações:

- a) Controle deslizante “a” () Numerador Azul
- b) Controle deslizante “b” () Numerador Verde
- c) Controle deslizante “c” () Denominador Azul
- d) Controle deslizante “d” () Denominador Verde

Deixe os controles deslizantes com os seguintes valores:

“a” = 1; “b” = 2; “c” = 1 “d” = 3.

E responda:

- 3) Qual a fração que representa a parte pintada das barras:
- a) Da 1ª barra b) Da 2ª barra c) Da 3ª barra d) Da 4ª barra
- $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{3}$

- 4) Quais dessas frações são equivalentes?

1 com 2 e 3 com 4.

Clique em animar, para que as barras se movam.

- 5) Qual o resultado dessa soma?

5/6.

- 6) Esse valor também é o resultado da soma de quais outras duas frações?

Espera-se que o aluno responda $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Caso os alunos não cheguem a esta conclusão o professor pode auxiliá-los questionando-os quanto ao tamanho das figuras que se unem ao selecionar o animar, assim como as frações que estas figuras representam.

Clique em animar novamente para parar as barras, e altere o valor dos controles deslizantes “a”, “b”, “c” e “d”.

- 7) Responda as questões 3, 5 e 6 com estes novos valores de “a”, “b”, “c” e “d”.

Espera-se que os alunos realizem o mesmo processo e percebam como realizar estas somas.

- 8) Então, quando temos frações com denominadores diferentes, quais os passos realizados para efetuar a soma?

O primeiro passo consiste em encontrar frações equivalentes as frações que se deseja somar de modo que tenham o mesmo denominador, e em seguida, soma-se os numeradores e mantém-se o denominador.

Tarefa 11

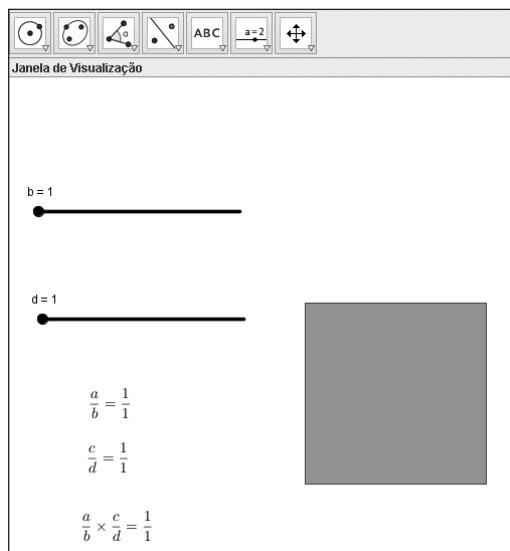
Você lembra como fazemos para calcular a área de um retângulo?

Multiplicamos a medida de um dos lados que chamamos de base pela medida do outro que denominamos altura.

Por exemplo, se tivermos um retângulo em que um dos lados (base) mede 3 e o outro (altura) mede 2, para encontrarmos a área desse retângulo, multiplicamos um lado (base) pelo outro (altura).

E se tivermos um quadrado e quisermos calcular apenas parte de sua área, sabendo que a área total vale 1, como podemos fazer isso?

Com o auxílio do professor abra o arquivo do GeoGebra: “**Tarefa11.ggb**”. Nele você pode ver um quadrado de lado 1.



Note que existem dois controles deslizantes, **b** e **d**. Logo abaixo, você pode ver as representações de frações $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e o resultado da multiplicação delas, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

Clique no controle deslizante **b** e use as setas do teclado para movê-lo para os lados. Observe e responda:

- 1) O que acontece com o quadrado quando você move o controle deslizante?

*O lado do quadrado é dividido em **b** partes iguais.*

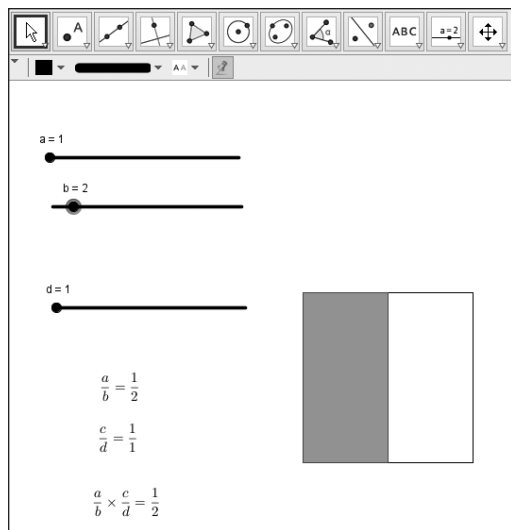
*O controle deslizante **a** representa o numerador e o seletor **b**, o denominador.*

- 2) O que acontece com o valor da área do retângulo azul quando você move **b**? Por quê?

*A área se altera quando movemos **b**, porque as medidas dos lados do quadrado foram alterados.*

- 3) Mova **b** até que a base meça $\frac{1}{2}$ (metade). Qual é a área do retângulo azul? Por quê?

A área mede $\frac{1}{2}$, porque um dos lados mede 1 e o outro mede $\frac{1}{2}$.



Agora clique no controle deslizante **d** e use as setas do teclado para movê-lo para cima e para baixo (mas não altere o valor de **b**).

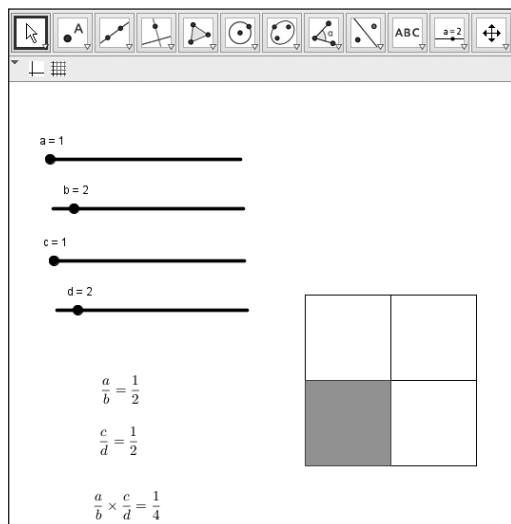
- 4) O que você percebe que acontece com o valor da área quando você move o controle deslizante **d**?

Espera-se que respondam que o valor da área é alterado à medida que é movido o controle deslizante.

- 5) Mova **d** até que a altura meça $\frac{1}{2}$ (um meio). E agora, qual é a área do retângulo? Por quê?

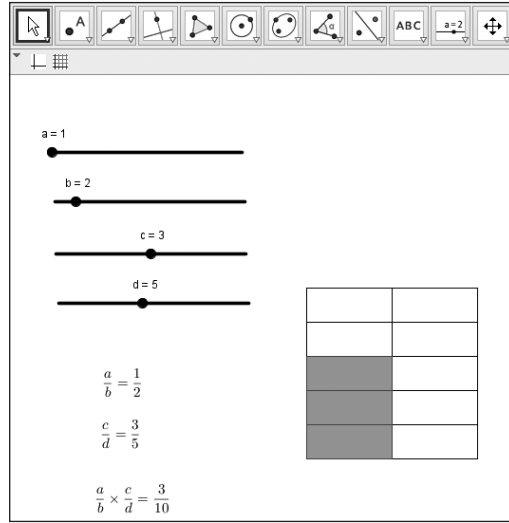
Área $\frac{1}{4}$, porque estamos calculando a área do retângulo, assim, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



- 6) Mova os controles deslizantes **c** e **b** de forma que a altura seja representada pela fração $\frac{3}{5}$, com a base pela fração $\frac{1}{2}$. Qual é a área?

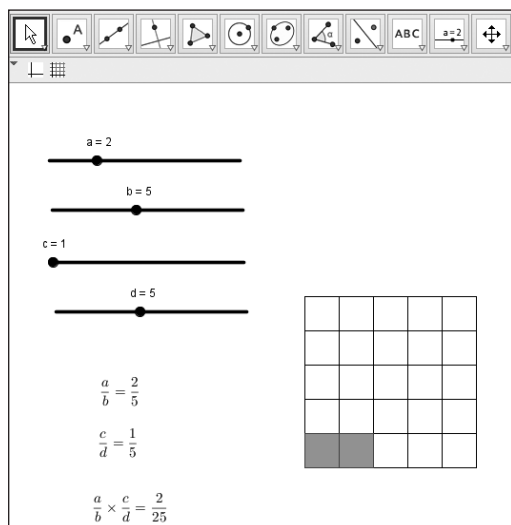
Área $\frac{3}{10}$.



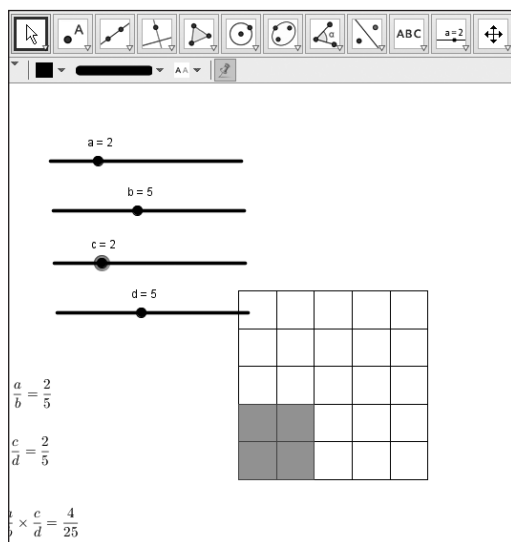
- 7) O que acontece com denominador, na multiplicação de frações?
Espera-se que os alunos observem que se está multiplicando os denominadores.
- 8) E o que acontece com o numerador?
Espera-se que os alunos observem que se está multiplicando os numeradores.
- 9) Então, como procedemos para realizar a multiplicação de frações?
Espera-se que os alunos respondam que para realizar a multiplicação de frações multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador.

Vamos fazer mais algumas multiplicações com frações?

- 10) Com os controles deslizantes **c** e **d** posicionados de forma que a base meça $\frac{1}{5}$, mova **a** e **b** para que a altura meça $\frac{2}{5}$. Qual a medida da área?
Área 2/25.



- 11) Mova os seletores **c** e **d** para que a base meça $\frac{2}{5}$. Qual o valor da área?
 Área $4/25$.



- 12) Mova os controles deslizantes **c** e **d** para que a base meça $\frac{3}{5}$. Qual o valor da área?
 Área $6/25$.

$a = 2$
 $b = 5$
 $c = 3$
 $d = 5$

$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$
 $\frac{c}{d} = \frac{3}{5}$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{6}{25}$

Tarefa 12

$a = 6$
 $b = 4$

fração mista

Com a ajuda do professor, abra o arquivo “*Tarefa12.ggb*”. Em seguida responda as questões abaixo.

Mova os controles deslizantes a e b para:

$a = 1$ e $b = 3$.

- 1) Qual a fração corresponde à parte pintada de azul?

$$\frac{1}{3}.$$

Mova os controles deslizantes a e b para:

$$a = 3 \text{ e } b = 3.$$

- 2) Qual a fração representada?

$$\frac{3}{3} \text{ ou um inteiro.}$$

- 3) Clique no botão fração mista e observe o que ocorre com o círculo?

O círculo não tem divisões.

- 4) Que fração representa a parte pintada de azul do círculo?

$$\frac{1}{1} \text{ ou apenas } 1.$$

Alguns estudantes podem não relacionar $1/1 = 1$ (todo) e ainda $3/3 = 1/1$. Nesse caso cabe ao professor questioná-los sobre a divisão entre o numerador e o denominador.

Marque a caixa “fração mista” (clique na caixa) e mova os controles deslizantes a e b para:

$$a = 4 \text{ e } b = 3.$$

- 5) Qual a fração correspondente à parte pintada?

$\frac{4}{3}$. *Considera-se que nessa fase o aluno não responderá um inteiro e um terço, pois é o que se espera que ocorra a partir das questões seguintes. Entretanto, caso algum aluno responda dessa forma, o professor pode realizar questionamentos a ele a fim de que os demais percebam o motivo de sua resposta.*

Outra resposta possível de ser dada pelos alunos é $4/6$. Cabe ao professor chamar a atenção que conta-se o número de divisões de apenas um todo (denominador). Vale apenas ainda pedir que os alunos observem o valor de b no controle deslizante.

- 6) Quantos círculos foram necessários nesse caso? Por quê?

2. Pois há mais pedaços do que divisões do todo.

Desmarque a caixa “fração mista” (clique novamente na caixa).

- 7) O que ocorreu com o primeiro círculo? Mudou a quantidade de partes coloridas?

Ficou inteiro azul. Não mudou a quantidade tomada, pois havia uma sobreposição de uma figura.

Mova os controles deslizantes para:

$$"a" = 8 \text{ e } "b" = 7.$$

- 8) Qual a fração que representa as partes azuis? Represente-a como uma fração imprópria e como uma fração mista.

$$\frac{8}{7}, 1\frac{1}{7}.$$

Tarefa 13

Quando dividimos um número pelo outro é normal fazermos perguntas do tipo: Se tenho 10 ovos e quero dividir a mesma quantidade em 2 caixas, quantos ovos caberão em cada caixa?

Assim, temos a divisão associada a distribuir uma quantidade em outra. Porém há outras perguntas que também usam operações de divisão, como:

- Quantos grupos de 2 unidades posso fazer com 12 balas?
- Supondo que queira transportar 12 ovos de um lugar a outro, mas que só disponha de um compartimento para levar 2 ovos por vez sem quebrá-los, posso perguntar: Quantas vezes vou ter que fazer o percurso de ida para transportar os 12 ovos?
- Ou ainda: Quantas vezes o 2 cabe no 12?

Quando trabalhamos com frações, e não temos números inteiros, a pergunta que normalmente fazemos é a última: Quantas vezes uma fração cabe em outra. Portanto, fazer a divisão $\frac{3}{5} \div \frac{2}{5}$, por exemplo, equivale a perguntar quantas vezes o $\frac{2}{5}$ cabe no $\frac{3}{5}$?

Vamos ver como isso pode ser feito.

Abra o arquivo do GeoGebra “*Tarefa13.ggb*”, veja que nele estão representadas duas frações conforme a Figura abaixo:



Perceba que há quatro controles deslizantes denominados por **a**, **b**, **c** e **d**. E como é mostrada no arquivo a divisão está na forma $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$.

Mova os controles deslizantes para os valores "a" = 1, "b" = 2, "c" = 1 e "d" = 5. Observe o que ocorre na divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ e nas figuras obtidas.

Clique em etapa 1.

- 1) Quantas vezes você acredita que a parte vermelha cabe na parte azul?
Espera-se que os alunos respondam que cabe mais de uma parte em vermelho na parte azul.

Verifique sua resposta clicando na etapa 2.

Espera-se que os alunos visualizem que cabem 2 vezes, mais uma parte desconhecida.

- 2) Que fração representa a parte vermelha sobreposta a azul?
*Espera-se que os alunos respondam $2\frac{1}{2}$ como fração mista ou $\frac{5}{2}$.
Os alunos podem responder também: “duas vezes e meio”, “2 e meio” ou até “2,5”, e nesses casos há necessidade do professor lembrar-lhes que a pergunta pede a fração correspondente.*

Verifique sua resposta clicando na etapa 3.

Os alunos devem perceber que a parte vermelha cabe duas vezes e meia na parte azul.

Desative todas as etapas marcadas.

Mova os controles deslizantes para os valores "a" = 4, "b" = 5, "c" = 2, "d" = 7.

Clique na etapa 1 para ativar a animação.

- 1) Quantas vezes você acredita que a parte vermelha cabe na parte azul?
Espera-se que os alunos verifiquem que na parte azul cabe mais de duas vezes da parte em vermelho.

Clique na etapa 2 e verifique se já é possível escrever uma fração que corresponda a essa divisão.

Não é possível, pois cabe duas vezes da parte em vermelho mais uma fração difícil de ser identificada.

Clique na etapa 3 e escreva a fração correspondente a essa divisão.

Cabe duas vezes inteiras mais $\frac{8}{10}$ da parte em vermelho, $2\frac{8}{10}$ como fração mista ou $\frac{28}{10}$.

Desative todas as etapas marcadas.

Mova os controles deslizantes para os valores "a" = 1, "b" = 4, "c" = 2, "d" = 5.

Clique na etapa 1 para ativar a animação.

- 1) Quantas vezes a parte vermelha cabe na parte azul?
Menos de uma vez.

Clique na etapa 2 e responda: Que fração representa a parte vermelha sobreposta a azul?

$$\frac{5}{8}.$$

Quando a parte em vermelho (denominador da fração correspondida à divisão) é maior que a parte em azul (numerador da fração correspondida à divisão) a etapa 3 não é exibida, pois a própria etapa anterior mostrará a fração representada. Neste caso temos uma fração própria.

Capítulo 3

ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES SOBRE ALGUNS PRESSUPOSTOS

Everton José Goldoni Estevam⁴

Muitos são os aspectos que precisam ser levados em consideração quando se discute o ensino de Estatística, pois embora estes conteúdos integrem o currículo de Matemática, é “preciso experimentar e avaliar métodos de ensino adaptados à natureza específica da Estatística, pois a ela nem sempre se podem transferir os princípios gerais do ensino da matemática” (BATANERO, 2001, p. 06). Diferente da característica determinista presente em muitos elementos da Matemática, ao se trabalhar ideias Estatísticas, assume-se como premissas a variabilidade e a incerteza, o que implica necessariamente um olhar sobre o processo em detrimento do resultado final. Tais elementos justificam os encaminhamentos das pesquisas no campo do Ensino de Estatística com foco no desenvolvimento do raciocínio e na análise de processos investigativos e retirada de conclusões. Estes são os pressupostos iniciais assumidos, os quais são mais bem explorados na seção que segue.

Educação estatística no ensino básico

Um dos aspectos que tem ganhado relevância no campo das pesquisas em Educação Estatística (e que nossa prática de professor também corrobora) refere-se à necessidade de os professores perceberem que a Estatística não é definida por cálculos processuais ou algoritmos, mas por

4 Professor junto ao Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *Campus* de União da Vitória, Mestre em Educação (UNESP) e Doutorando junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

processos de investigação no contexto da atividade social (GATTUSO; OTTAVIANI, 2011). Por exemplo, na exploração de gráficos estatísticos, professores costumam ressaltar as técnicas de construção e não o pensamento (e o raciocínio) necessário para sua interpretação e tomada de decisão (PFANNKUCH, 2008). Exemplos como estes denunciam a possível incompatibilidade entre as crenças dos professores sobre a Estatística e a compreensão de Educadores Estatísticos sobre essa ciência (BATANERO; BURRIL; READING, 2011).

No Brasil, pesquisas apontam que esse descompasso pode se justificar pela formação deficitária que os professores têm recebido no que se refere aos conceitos e aos aspectos didáticos envolvidos no ensino de Estatística (SOUZA; MENDONÇA; LOPES, 2013). É comum a formação priorizar os atributos matemáticos que permeiam a Estatística em detrimento dos conceitos e ideias que a sustentam.

É necessária a criação de novas culturas nas aulas de Matemática e Estatística em que os alunos reconheçam seu papel de protagonista, mobilizem-se para o conhecimento, elaborem conjecturas, testem hipóteses, questionem hipóteses alheias, partilhem ideias e perspectivas e validem seus raciocínios de modo a demonstrar consciência e autonomia em meio ao processo de aprendizagem.

A habilidade para entender a terminologia estatística, compreender a linguagem e os conceitos estatísticos presentes em um contexto investigativo e o desenvolvimento de uma atitude de questionamento frente aos dados sustentam a literacia estatística⁵ (WATSON, 1997), a qual remete a outros dois conceitos relacionados: o pensamento estatístico (*statistical thinking*) e o raciocínio estatístico (*statistical reasoning*).

O *pensamento estatístico* pode ser entendido como a capacidade de relacionar dados quantitativos com situações concretas, de modo a considerar sempre a presença da variabilidade e da incerteza para explicitar o que os dados podem dizer sobre o problema em questão. Envolve, portanto, o desenvolvimento de hábitos mentais e a habilidade de resolução de problemas. Wild e Pfannkuch (1999) afirmam que o *pensamento estatístico* envolve ainda outros componentes, nomeadamente, reconhecer a necessidade dos

5 Embora alguns pesquisadores utilizem o termo letramento estatístico, optamos por utilizar o neologismo literacia estatística por acreditarmos que ele se aproxima mais da origem e do significado do termo em inglês *statistical literacy*.

dados; lidar com a transnumeração que está relacionada com as transformações numéricas realizadas para facilitar o entendimento em um processo de análise estatística; reconhecer e lidar com a onipresença da variação; utilizar um conjunto distinto de modelos estatísticos, já que o pensamento estatístico está pautado em modelos (BATANERO, 2001); e por fim, ter conhecimento estatístico, do contexto e da capacidade de analisar os resultados de modo a considerar esse contexto de análise.

Já o *raciocínio estatístico* pode ser definido como o modo como as pessoas raciocinam com as ideias estatísticas, com o objetivo de atribuir um significado à informação estatística. Envolve a capacidade de fazer interpretações a partir de um conjunto, representação ou resumo de dados. Muitos dos raciocínios estatísticos combinam dados e acaso, que permitem a mobilização da capacidade de fazer interpretações estatísticas e inferências, simultaneamente (GARFIELD; GAL, 1999).

Apropriando-nos das discussões apresentadas por Lopes (2012), percebemos que o pensamento é aquilo que é trazido à existência por meio da atividade intelectual. “É um produto da mente, que pode surgir mediante atividades racionais do intelecto ou por abstrações da imaginação” (p. 161). Já o raciocínio é uma parte do pensamento que caracteriza “uma operação lógica, discursiva e mental. O intelecto humano utiliza uma ou mais proposições para concluir, por mecanismos de comparações e abstrações, quais são os dados que levam às respostas verdadeiras, falsas ou prováveis” (p. 162). Neste sentido, o raciocínio se relaciona com as justificações que apresentamos para nossas ações, compreensões, decisões, etc.

Assim, no contexto da Estatística, assumimos que o *raciocínio estatístico* representa a habilidade para trabalhar com as ferramentas e os conceitos aprendidos, explicitando “por que” e “como” lidar com os dados em situações específicas, enquanto o *pensamento estatístico* conduz a uma compreensão global da dimensão do problema, das ferramentas estatísticas de base, permitindo ao aluno tomar alguma consciência e questionar de modo espontâneo a realidade observada por meio da Estatística (CHANCE, 2002).

Dentre as ideias estatísticas, uma área de importância e que abarca o pensamento e o raciocínio estatístico são as *medidas de tendência central*: média, moda e mediana. Como o próprio nome sugere, essas medidas indicam a tendência de uma distribuição de dados e devem ser discutidos (para

além de seus cálculos) seus significados, propriedades e adequabilidade para representação dos dados.

De acordo com o currículo brasileiro, a Estatística está situada no bloco de conteúdos estruturantes denominado *Tratamento da Informação*. O trabalho com as *medidas de tendência central* está previsto para ser iniciado a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, sendo que a ideia de média aritmética já se faz presente no 2º ciclo dos anos iniciais (4º e 5º anos). De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) (BRASIL, 1998), a moda, a mediana e a média devem ser trabalhadas a partir do terceiro ciclo (6º e 7º anos) como importantes ferramentas para análise de dados, sendo esta última considerada “um indicador da tendência de uma pesquisa” (p. 74). No ciclo seguinte (8º e 9º anos), o aluno já deve explorar situações que envolvam a construção de tabelas de frequências e gráficos, utilizando diferentes recursos, de modo a possibilitar a realização de análises e retirada de conclusões a partir da leitura dessas representações. No que se refere às Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCEs) (PARANÁ, 2008), essas medidas devem ser trabalhadas no 7º ano, de modo que o aluno seja capaz de analisar e interpretar informações de pesquisas estatísticas e seja capaz de calcular a moda, a média aritmética e a mediana.

Semelhante ao que já foi citado no início da seção, pesquisas brasileiras revelam que o trabalho envolvendo medidas de tendência central na Educação Básica (quando realizado) tem priorizado os algoritmos para determinação de seus valores em detrimento de discussões quanto aos seus significados em contexto de análise de dados, com vistas à retirada de conclusões (ESTEVAM; CYRINO, no prelo).

Por outro lado, temos bons exemplos de aspectos que merecem ser tratados na Educação Básica, os quais remetem aos significados da média, como por exemplo, aqueles definidos por Batanero (2000), quando apresenta sete significados que precisam ser mobilizados no decorrer das discussões envolvendo o conceito de média, quais sejam:

1. Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido;
2. Necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme;

3. Servir de elemento representativo de um conjunto de dados;
4. Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população;
5. A média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população;
6. A média como uma estimativa da variável para tempo futuro;
7. Significado procedimental.

Além de seus significados, julgamos pertinente a exploração das propriedades relacionadas à média como forma de corroborar essa significação, as quais são sistematizadas por Strauss e Bichler (1988):

1. A média está localizada entre os valores extremos;
2. A soma dos desvios a partir da média é igual a zero;
3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores;
4. A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir da qual foi calculada;
5. A média pode ser um valor que pode não corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais;
6. No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos;
7. A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial).

No que concerne à moda, é preciso perceber que ela refere-se à classe de maior frequência, e à mediana, ao elemento central da distribuição quando esta se encontra ordenada. Cabe salientar que Cobo e Batanero (2000) destacam que o cálculo da mediana é complexo, porque o algoritmo varia quando se tem quantidade de valores pares (média aritmética entre os dois elementos centrais) ou ímpares (apenas o elemento central), assim como quando se tem valores agrupados (é preciso determinar a classe ou intervalo a priori para então determinar a mediana a partir de princípios proporcionais) ou sem agrupar. Por fim, ressaltamos que as pesquisas apontam que os alunos tendem a confundir a média, com a mediana e a moda, isto é, afirmar que a média é o valor central da distribuição ou o valor mais frequente (BATANERO, 2000).

Outro aspecto a ser considerado no campo da Educação Estatística são os *gráficos*. Segundo Wainer (1992), o uso de gráficos está tão

internalizado em nosso dia a dia que não é possível imaginar o mundo sem ele. Assim, fica patente a necessidade de desenvolvimento do domínio da linguagem gráfica, até mesmo como fator de inserção social de qualquer cidadão. Tal domínio contribui no desenvolvimento da capacidade de leitura dos dados representados em um gráfico, de modo a permitir que o leitor consiga interpretar e generalizar as informações nele presentes. O desenvolvimento dessa capacidade a partir de diferentes tipos de gráficos, bem como o estabelecimento das relações entre a linguagem gráfica e as demais formas de representação de dados, proporciona uma evolução da compreensão das pessoas sobre as diferentes formas de representação (LOPES, 2004).

Em termos curriculares, nos PCNs (BRASIL, 1998), os gráficos estatísticos também devem ser trabalhos no terceiro ciclo (6º e 7º anos) a partir da exploração de situações que envolvam coleta, organização e análise de informações; construção e interpretação de tabelas e gráficos; e formulação de argumentos convincentes fundamentados nessas representações. Tal pressuposto é semelhante nas DCEs (PARANÁ, 2008), sendo que essa ideia permeia os 6º, 7º e 8º anos.

Wainer (1992), baseado no que as pesquisas apontam, tece uma crítica quanto à priorização da leitura e interpretação de gráficos na Educação Básica, uma vez que muitas das dificuldades e equívocos relacionados com a capacidade de retirar informações a partir de representações gráficas podem decorrer de uma construção defeituosa e/ou falha. Segundo o autor, caracterizar a capacidade de compreensão de informações apresentadas em um gráfico defeituoso é semelhante a caracterizar a capacidade de alguém ler por meio de questões repletas de erros ortográficos. Embora haja evidências de que a capacidade de compreender gráficos apresenta dificuldades, não há evidências de que a habilidade para desenhar gráficos não apresente problemas. Assim, devemos tratar também da capacidade de construção e exploração. Além de tornar os alunos capazes de organizar seus dados por meio de registros gráficos e tabelares, com a elaboração e exploração de gráficos eles podem tomar consciência das relações existentes explícita e implicitamente em cada representação de forma a perceber erros em outras construções, contribuindo para o desenvolvimento da literacia estatística que, em síntese, pode ser entendida como a habilidade de interpretar, avaliar, argumentar e validar

informações utilizando corretamente terminologias e conceitos estatísticos (ESTEVAM; FURKOTTER, 2010).

Estes elementos parecem-nos interessantes de serem considerados quando pensamos na elaboração de tarefas para explorar as ideias relacionadas aos *gráficos* e às *medidas de tendência central* na Educação Básica e, portanto, sustentam muitas das intenções das tarefas que se apresentam a seguir.

Encaminhamento do material

O GeoGebra possibilita uma diversidade de explorações no que concerne à construção e desenvolvimento de ideias matemáticas¹. Dessa forma, cabe esclarecer aquelas que sustentam nossas intenções aos estruturarmos as tarefas, de forma a orientar as ações no decorrer da prática letiva. As tarefas aqui apresentadas foram pensadas em uma perspectiva de ensino exploratório, a qual assume que nos processos de ensino e de aprendizagem a ênfase deve ser colocada no aluno e em condições que favoreçam a participação, individual e coletiva, em uma atividade de inquirição e negociação.

Assim, o conhecimento matemático é construído a partir de situações práticas específicas, nas quais os alunos levantam questões, formulam conjecturas e exploram possíveis caminhos, apoiando-se nas suas experiências anteriores. Deste modo, no âmbito do ensino exploratório, as tarefas matemáticas assumem particular relevância, uma vez que é a partir delas que a atividade matemática do aluno se desenvolve. Estas devem favorecer o “raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas” (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012, p. 256).

As tarefas apresentadas têm por objetivo a mobilização do pensamento e do raciocínio estatístico a partir da exploração das representações/construções do GeoGebra. A ideia é que os alunos consigam estabelecer relações entre as representações gráficas (Histograma, Box-Plot, Gráfico de Setores, Representação Gráfica das Medidas de Tendência Central), a distribuição dos dados apresentadas nas tabelas e os conceitos estatísticos em

1 Veja a Capítulo sobre o GeoGebra do presente livro.

discussão em cada uma das tarefas. Assim, de modo geral, não temos por intenção a construção das representações no GeoGebra, tendo em conta a complexidade envolvida quando se assume por objetivo a estruturação de representações dinâmicas (como as que apresentamos) que mudam sua estrutura de acordo com a alteração dos dados da distribuição.

Portanto, chamamos atenção para que o professor incentive a exploração das representações pelos alunos a partir da alteração dos dados da distribuição, seja digitando outros valores ou utilizando o controle deslizante, o qual origina outras distribuições (observando sempre as orientações presentes no material do professor).

A Tarefa 1 *Pacote de Balas* objetiva a compreensão do significado procedimental da Média Aritmética (algoritmo), relacionando-o com as características geométricas da média em uma representação gráfica. Ainda, relacionando com o que apontam as pesquisas, é possível discutir o significado da média em um comparativo com a mediana ou a moda e assim corrigir possíveis equívocos de compreensão conceitual. A opção pela exploração do Diagrama de Caixas (Box-Plot) é decorrente da pouca exploração desse tipo de gráfico na Educação Básica (e muitas vezes até mesmo no Ensino Superior), o qual traz informações interessantes acerca da distribuição dos dados, já que tem sua estrutura pautada nas medidas de posição ou separatórias (limite inferior e superior, quartis e mediana). Assim, acreditamos que ele constitui uma representação importante para a compreensão da dispersão dos dados (como os dados estão distribuídos) de forma simples, a partir dessas medidas.

A tarefa 2 *Desempenho da Turma* visa aprofundar as discussões sobre as medidas de tendência central (média, moda e mediana) com especial destaque para compreensão da média em dados agrupados. Para tanto, os alunos devem explorar a tabela de distribuição de frequências (alterando os valores, conforme orientações do material do professor) e relacionar com o histograma, observando o que acontece quando os dados são alterados. É importante empreender atenção no sentido de que os alunos percebam o agrupamento dos dados na tabela de distribuição de frequência (discutir a amplitude total dos dados e sua separação em intervalos, os quais agrupam os dados) e a representação desse agrupamento no histograma (relacionar os intervalos da tabela de frequência ao eixo horizontal do gráfico e seus respectivos intervalos).

Já a Tarefa 3 *Eleições* explora o gráfico de setores. Para tanto, é fundamental que os alunos relacionem a tabela de distribuição de frequências com os setores que compõem o gráfico. Tal compreensão envolve necessariamente a percepção dos conceitos de ângulo e de proporcionalidade entre os ângulos de cada setor do círculo às respectivas frequências, sejam elas absolutas (quantidade de eleitores) ou relativas (percentual de eleitores) com intenção de voto em determinado candidato.

Salientamos, finalmente, que conforme é discutido pelos PCNs (BRASIL, 1998), por Gattuso e Ottaviani (2011) e Pfannkuch (2008) é fundamental que as práticas em sala de aula envolvendo a Estatística transcendam os aspectos matemáticos que a permeiam e explorem com o devido cuidado e valor a análise dos dados no contexto da situação, com vistas à retirada de conclusão. Com isso, chamamos atenção para importância das conclusões dos alunos acerca da atividade realizada em cada situação, como um importante elemento no processo de aprendizagem estatística e que deve ser levado em conta pelo professor ao explorar as tarefas apresentadas.

Avaliação

Assumimos que a avaliação, de algum modo, norteia os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula, uma vez que aponta para aluno e professor o que ficou das aulas realizadas e que conhecimento vem sendo produzido. Os PCNs (BRASIL, 1998) apontam que a avaliação realizada na sala de aula deve ser entendida como um processo único e contínuo que se inicia no primeiro dia de aula e só termina no último, uma vez que visa auxiliar os processos e progressos da aprendizagem do aluno e do professor, ocorridos durante todo o ano letivo.

Dadas as características e objetivos da Educação Estatística já discutidos anteriormente, e os apontamentos curriculares supracitados, julgamos incompatível pensar um processo avaliativo com uma prova constando apenas de exercícios de aplicação de algoritmos para sua solução. Incompatível porque, como dito anteriormente, as tarefas que seguem visam à exploração e desenvolvimento do raciocínio estatístico que permeiam os diferentes conceitos presentes em cada uma delas e, portanto, é preciso ações de avaliação convergentes a essa perspectiva.

A utilização de portfólios, narrativas ou relatórios sintéticos de aulas, a análise da produção escrita dos alunos no próprio desenvolvimento das tarefas, podem ser alternativas interessantes que nos parecem mais ajustadas ao modelo de aula que pensamos e capazes de sustentar e impulsionar os processos de construção de conhecimento dos alunos.

Referências

BATANERO, C. *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, 2001.

_____. Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, n. 25, p. 41-58, 2000.

_____.; BURRIL, G.; READING, C. Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics an preparing mathematics teachers. In: BATANERO, C.; BURRIL, G.; C. READING, C. (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASI Study*. London: Springer, 2011. p. 407-418.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: o caso de Célia. In: SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P.; BOAVIDA, A. M. et al. (eds.). *Investigação em Educação Matemática 2012: práticas de ensino da matemática*. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática – SPIEM, 2012. p. 255-266.

CHANCE, B. L. Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. *Journal of Statistics Education*, v. 10, n. 3, 2002.

COBO, B.; BATANERO, C. La mediana en la educación secundaria ¿Un concepto sencillo? *UNO*, n. 23, p. 85-96, 2000.

ESTEVAM, E. J. G; CYRINO, M. C. C. T. Educação Estatística e a Formação de Professores de Matemática: cenário de pesquisas brasileiras. *Zetetiké – Revista de Educação Matemática*. Campinas (no prelo).

ESTEVAM, E. J. G; FÜRKOTTER, M. (Res)Significando gráficos estatísticos no Ensino Fundamental com o software SuperLogo 3.0. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 12, n. 3, p. 578-597, 2010.

GARFIELD, J.; GAL, I. Teaching and Assessing Statistical Reasoning. In: STIFFE, L. (ed.). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, VA: National Council Teachers of Mathematics, 1999. p. 207-219.

GATTUSO, L.; OTTAVIANI, M. G. Complementing Mathematical Thinking and Statistical Thinking in School Mathematics. In: BATANERO, C.; BURRIL, G.; C. READING, C. (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASI Study*. London: Springer, 2011. p. 121-132.

LOPES, C. A. E. Literacia estatística e o INAF 2002. In: FONSECA, M. C. F. R. (Org.). *Letramento no Brasil: Habilidades Matemáticas – reflexões sobre o INAF 2002*. São Paulo: Global, 2004. p. 187-197.

_____. A educação estocástica na infância. *Revista Eletrônica de Educação*, São Carlos, SP, UFSCar, v. 6, n. 1, p. 160-174, 2012.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes curriculares da Educação Básica: Matemática*. Curitiba, 2008.

PFANNKUCH, M. Training teachers to develop statistical thinking. In: BATANERO, C.; BURRIL, G.; C. READING, C. et al. (eds.). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, Mexico, 2008.

SOUZA, L. O.; MENDONÇA, L. O.; LOPES, C. E. (2013). A Ação Pedagógica e o Desenvolvimento Profissional de Professores em Educação Estocástica. In: COUTINHO, C. Q. S. (Ed.). *Discussões sobre o Ensino e a Aprendizagem da Probabilidade e da Estatística na Escola Básica*. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 121-142.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 19, 64-80, 1988.

WAINER, H. Understanding graphs and tables. *Educational Research*, Washington, v. 21, n. 1, p. 14-23, jan./fev. 1992.

WATSON, J. M. Assessing Statistical Thinking Using the Media. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (Eds.). *The Assessment Challenge in Statistics Education*. IOS Press, 1997.

WILD, C.; PFANNKUCH, M.. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999.

Tarefa 1: pacotes de balas

Ariel Marczaki

Marília Dranka

Dirceu Scaldelai

Everton José Goldoni Estevam

O que é o Diagrama de Caixas (Box-Plot)?

O Diagrama de Caixas (Box-Plot) é uma representação gráfica formada por linhas e caixas (figura acima). Pra compreendê-lo, salienta-se que as linhas são delimitadas pelo ponto e a extremidade das caixas e as caixas são os retângulos vermelhos.

Em uma determinada empresa que fabrica e embala balas em pacotes, o setor de controle de qualidade supervisiona a linha produção com o intuito de prezar pela qualidade de padronização. Contudo, algumas variações nos conteúdos das embalagens de 700 gramas são identificadas diariamente em amostras coletadas. Em uma amostra de doze pacotes, que foram coletados aleatoriamente, foram registradas as seguintes quantidade de balas.

Quantidade de Balas por pacote					
98	100	101	98	99	100
102	100	101	101	100	98

Mova o seletor “Amostras” e observe o que acontece com os valores da tabela e o com o Diagrama de Caixas (Box-Plot). Considerando suas observações sobre o Diagrama de Caixas, responda as seguintes questões:

Objetivos da tarefa

- Compreender a Média Aritmética (significado procedimental);
- Perceber as características geométricas da Média Aritmética;
- Compreender a estrutura de um Diagrama de Caixas (Box-Plot) e relacioná-lo às medidas de posição e à dispersão dos dados;

Conhecimentos prévios

- Amostragem e proporção.

Seriação sugerida

- Sugere-se a exploração da tarefa em questão a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, assim como nos anos subsequentes e no Ensino Médio, com aprofundamento das análises e discussões.

Orientações para o professor

Antes da aula

- Antes de iniciar a aula o professor deve verificar se os computadores da escola possuem o programa GeoGebra, em versão 4.2 ou superior.
- Salvar o arquivo “Tarefa_1_Pacote_de_balas.ggb” em todos os computadores e verificar se o mesmo abre corretamente.
- Caso haja algum problema, pode ser utilizada a versão *online* do GeoGebra.

Introdução da tarefa

- O professor deve solicitar que os alunos abram o arquivo “Tarefa_1_Pacote_de_balas.ggb”, que já estará salvo no computador.
- Ao entregar a tarefa aos alunos, o professor pode fazer uma leitura das questões em conjunto com eles.

- Explicar que os alunos podem/devem utilizar o arquivo do GeoGebra para responder as questões e que só devem mover o seletor “Amostras”.
- Há cinco amostras, que ao mover o seletor “Amostras”, vão alternando entre elas. A Amostra 1 é a amostra original da tarefa e as outras 4 são amostras pensadas para levar o aluno a visualizar determinadas situações (distribuições dos dados) no Diagrama de Caixas,
- Sobre as amostras, todas possuem mesmo valor de mínimo e de máximo, e o mesmo número de pacotes, 12;

Desenvolvimento da tarefa

- 1) Observando a quantidade de balas por pacote na tabela “**Quantidade de balas por pacote**” (Amostra 1) e sabendo que o peso do pacote é 700 gramas, qual é a(o) massa/peso média de cada bala?

Para sabermos primeiramente qual é a média de balas dentro dessa amostra, devemos fazer a média aritmética dos valores na tabela, valor o qual está no gráfico em vermelho. Após isso, dividir o 700, que é o valor correspondente aos gramas do pacote, pelo número médio de balas nessa amostra, para chegar num valor aproximado do peso médio de cada bala. Pode-se usar uma regra de três para encontrar este valor, por exemplo, uma relação entre a média do nº de balas de cada pacote da amostra para os gramas em cada pacote e uma bala para saber o peso para queremos saber o peso de cada bala, assim:

$$99,83 - 700$$

$$1 - x$$

$$700 \cdot 1 = 99,83 \cdot x$$

$$\frac{700}{99,83} = x$$

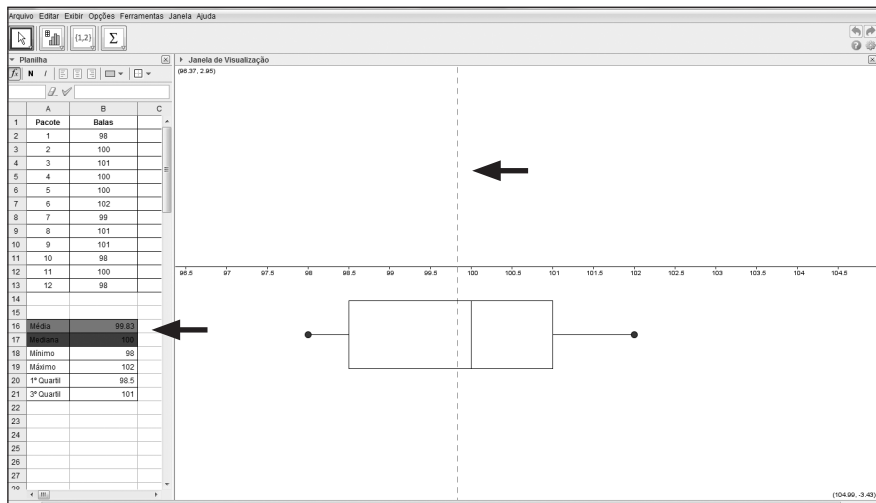
$$7,011920264449564 = x$$

Na hora de os alunos obterem esse resultado, pode-se comentar sobre o arredondamento de corte ou arredondamento “para baixo”, obtendo-se o valor médio de sete gramas para cada bala. Se acontecer, de algum

aluno, utilizar o valor da moda desta tabela, que, por exemplo, é 100, na hora dele dividir $\frac{700}{100}$, ele vai encontrar o valor exato de 7 gramas, também correspondendo ao valor correto, mas explicar para o aluno que é pedido o valor médio de cada bala, logo é necessário fazer a média de todos os pacotes da amostra, para poder ser a média do peso/ massa.

- 2) O que a linha vermelha representa nesse gráfico? Qual o valor dela (Amostra 1)? Onde mais esse valor está representado no arquivo do GeoGebra?

A linha vermelha representa a média, referente aos valores da tabela da tarefa e da planilha do Geogebra (Amostra 1). O valor da média com os valores que se possui na tabela da tarefa e da planilha, antes dos alunos alterarem estes valores para outras amostras é de 99,83. Os alunos devem notar a correspondência da planilha e do gráfico, percebendo que está identificado o valor da média na planilha ao lado do gráfico. A alteração das amostras e verificação sobre o que acontece com a linha vermelha no gráfico podem favorecer a percepção das alterações e a identificação de sua referência.



- 3) O que está representado nas bolinhas no fim das linhas do Diagrama de Caixa (Box-Plot)?

O que representa as bolinhas no fim das linhas do gráfico é o valor de mínimo e de máximo dos dados das tabelas da folha e da planilha do arquivo do Geogebra, no qual os alunos poderiam afirmar isso verificando que o mesmo valor de mínimo encontra-se no gráfico, relacionando com o valor que se encontra na reta numérica logo acima do Diagrama de Caixas (Box-Plot), que encontra-se em 98, enquanto o valor de máximo encontra-se também no gráfico e na planilha, sendo representado pelo número 102. Comentar também com alunos que é possível encontrar o valor mínimo e máximo deste gráfico verificando apenas qual é o menor valor e qual é o maior valor na tabela.

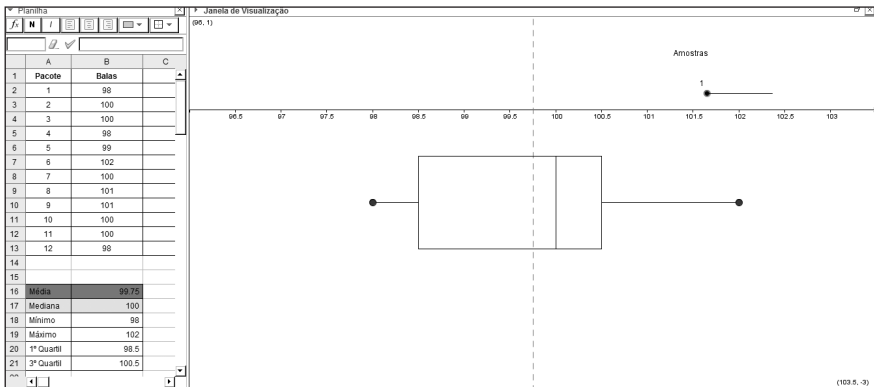
- 4) O que está representado nas linhas verticais das caixas? Qual lado possui maior quantidade de balas por pacote? Justifique.

A primeira linha vertical representa o valor do primeiro quartil, a segunda linha vertical representa a mediana e a terceira linha representa o terceiro quartil, valores os quais podem ser relacionados com a planilha ao lado do gráfico, no qual está nomeado cada um dos valores. A preocupação não está na denominação desses valores, mas na percepção de que eles dividem a distribuição ordenada dos dados em quatro partes com exatamente a mesma quantidade de dados, isto é, as linhas verticais dividem os 12 pacotes de balas e quatro grupos com três pacotes cada, separados de acordo com as quantidades de balas em cada pacote (da menor para a maior). Isso possibilita perceber onde a distribuição está mais concentrada (mais pacotes e, portanto, as linhas ou caixas serão pequenas) ou mais dispersa (menos pacotes e, portanto, as linhas ou caixas serão grandes). Havendo dificuldade na compreensão de quais linhas à tarefa se refere, pode-se mostrar no gráfico. Tendo dificuldade na compreensão dos valores, deve-se incentivar o aluno a relacionar a planilha com a tabela de dados brutos e o gráfico. Na amostra 1, o lado que possui mais “espaço” é o lado esquerdo, que vai do primeiro quartil à mediana, pois os valores estão mais dispersos. O aluno precisa justificar qual dos lados possui mais “espaço”. O professor também pode pedir aos alunos que façam um esboço do Diagrama de Caixas na folha entregue para eles, e façam também a reta do Geogebra no intervalo de 98 a 102, marcando os valores da tabela da folha com

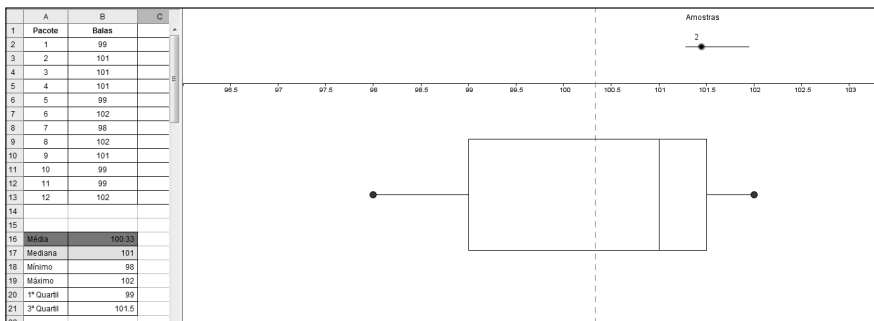
os valores das balas em cada pacote para que os alunos compreendam como os valores estão espalhados ou juntos, na distribuição. Podem-se agregar as palavras espalhados e juntos para que os alunos tenham melhor compreensão. Comentar também sobre a questão das quantidades para facilitar a explicação de como funciona as medidas de dispersão nesse gráfico, complementando a explicação de como funciona a ideia do gráfico.

- 5) Mova o seletor “Amostras” novamente e verifique o que acontece com o Diagrama de Caixas. Quando as caixas/linhas ficam maiores? E quando ficam menores? Que conclusão você chega com essas visualizações?

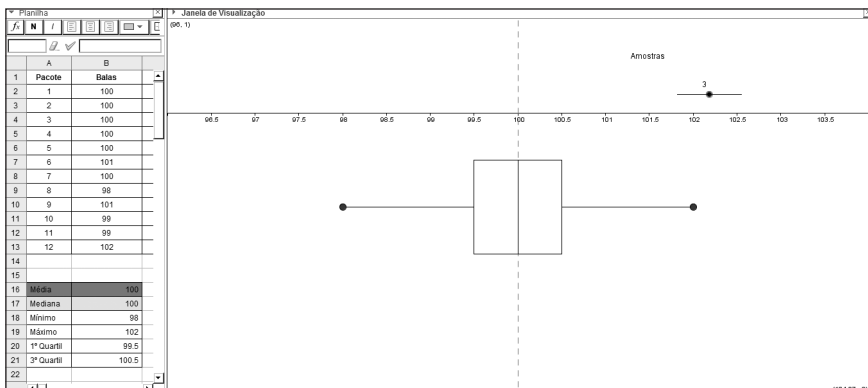
Na amostra 1, temos 98, 100, 100, 98, 99, 102, 100, 101, 101, 100, 100, 98. Se ordenarmos os valores, teremos 98, 98, 98, 99, 100, 100, 100, 100, 100, 101, 101, 102. A divisão entre os quartis é feita a partir do princípio que vamos dividir essa amostra em 4 grupos, então, para representar graficamente como seria o quão espaçada ou quão agrupadas estão estes pacotes de balas, temos que o primeiro quartil tem o mínimo de 98 e a limitação do primeiro quartil é a média do terceiro e do quarto valor, sendo 98,5, e assim sucessivamente com os outros quartis e com a mediana. O valor da mediana nessa amostra é 100 e o terceiro quartil é 100,5, e o valor de máximo é 102. A amostra possui uma grande diferença no segundo quartil e no terceiro quartil pelo fato de que os valores dos dados estão mais espaçados no primeiro, enquanto no terceiro os valores estão mais próximos. Em outras palavras, no segundo quartil há dados com maior distância entre seus valores do que o terceiro quartil, por exemplo, no qual os valores dispersam menos. Compare observando os valores: no segundo quartil os valores são 99, 99 e 100 enquanto no terceiro quartil os valores são 100, 100 e 100. A distância entre os valores justifica a forma do Diagrama de Caixas, tanto nessa amostra, quanto nas outras.



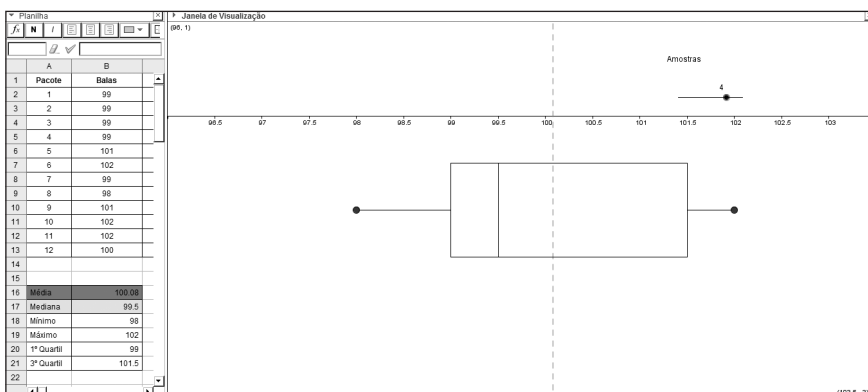
Na amostra 2, temos 99, 101, 101, 101, 99, 102, 98, 102, 101, 99, 99, 102. Se ordenarmos os valores, teremos 98, 99, 99, 99, 99, 101, 101, 101, 101, 101, 102, 102. A divisão entre os quartis é feita a partir do princípio de dividir essa amostra em 4 grupos, então, para representar graficamente como seria o quão espaçados ou quão agrupados estão estes pacotes de balas, temos que o primeiro quartil tem o mínimo de 98 e a limitação do primeiro quartil é a média do terceiro e do quarto valor, sendo 99, e assim sucessivamente com os outros quartis e com a mediana. O valor da mediana nessa amostra é 101 e o terceiro quartil é 101,5, e o valor de máximo é 102. A amostra possui uma grande diferença no segundo quartil e no terceiro quartil pelo fato de que os valores dos dados estão mais espaçados no primeiro, enquanto no terceiro os valores estão mais próximos. A diferença deste Diagrama de Caixas da Amostra 2 com o Diagrama de Caixas da Amostra 1 é o quão espaçado está o primeiro quartil da caixa, logo, em palavras menos conceituais, que a linha da Amostra 1 do primeiro quartil está menor que a linha da Amostra 2.



Na Amostra 3, temos 100, 100, 100, 100, 100, 101, 100, 98, 101, 99, 99, 102. Ordenando esses valores chegamos a 98, 99, 99, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 101, 101, 101, 102. Nota-se que possui muitos valores repetidos 100, e 101 também, o que justifica o formato do Diagrama de Caixas, sendo que está muito concentrado o espaço nas caixas próximo de 100.



Na Amostra 4, temos 99, 99, 99, 99, 101, 102, 99, 98, 101, 102, 102, 100. Ordenando esses valores: 98, 99, 99, 99, 99, 99, 100, 101, 101, 102, 102, 102. Neste gráfico nota-se que temos uma quantidade grande de 99 e, pela primeira vez, mais de um 102 na amostra. Por isso, nota-se que o terceiro quartil está muito espaçado em relação ao segundo quartil, e logo, há mais pacotes de balas no segundo quartil do que no terceiro quartil.



Na amostra 5, temos os valores 99, 99, 99, 102, 100, 101, 101, 99, 101, 100, 100, 98, e ordenando-os temos 98, 99, 99, 99, 99, 100, 101, 101, 101, 101, 102. É o Diagrama de Caixas que parece, e deve parecer, na percepção dos alunos, mais bem distribuído. Os quartis não estão com números decimais, e inclusive, a distribuição relativa as linhas e caixas possuem um padrão, sendo um valor correspondente a um valor da amostra.

Tarefa 2: desempenho da turma

Patrícia Andressa Maieski

Willian Burgardt de Souza

Clara Caroline Uniat

Dirceu Scaldelai

Joaide F. C. S. Bughay

A tabela e o gráfico apresentados no arquivo “Tarefa_2_Notas_disciplina.ggb” do GeoGebra servirão de base para suas análises. Eles representam as notas obtidas por alunos da “Turma X” na disciplina de Língua Portuguesa num determinado bimestre. Abra o arquivo no GeoGebra e responda as questões abaixo.

Objetivos da tarefa

- Relacionar a tabela de distribuição de frequências e o histograma contidos no arquivo do GeoGebra, fazendo a interpretação dos dados da tabela e do gráfico;
- Aprender conceitos de média e frequência em dados agrupados;
- Explorar aspectos algébricos, aritméticos e geométricos da média;

Conhecimentos prévios

- Média aritmética em dados discretos, porcentagem.

Seriação sugerida

- Sugere-se a exploração da tarefa em questão a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, assim como nos anos subsequentes e no Ensino Médio, com aprofundamento das análises e discussões.

Orientações para o professor

Antes da aula

- Antes de iniciar a aula o professor deve verificar se os computadores da escola possuem o programa GeoGebra, em versão 4.2 ou superior.
- Salvar o arquivo “Tarefa_2_Notas_disciplina.ggb” em todos os computadores e verificar se o mesmo abre corretamente.
- Caso haja algum problema, pode ser utilizada a versão on line do GeoGebra.

Introdução da tarefa

- O professor deve solicitar que os alunos abram o arquivo “Tarefa_2_Notas_disciplina.ggb”, que já estará salvo no computador.
- Ao entregar a tarefa aos alunos, o professor pode fazer uma leitura das questões em conjunto com eles.
- Explicar que os alunos podem/devem utilizar o arquivo do GeoGebra para responder as questões e que só devem alterar os dados da coluna B (Nº de Alunos), sem digitar no valor de total (célula B7), que é calculado automaticamente.
- Para realizar as alterações dos valores devem apenas clicar na célula a ser alterada e digitar o novo valor, sem utilizar o “delete”, pois isso pode apagar os demais valores da tabela e desconfigurar o gráfico (figura abaixo).

- 2) Que relações você(s) percebe(m) **entre a tabela e o gráfico** (altere as quantidades na tabela na coluna “Nº Alunos” e observe o que ocorre no gráfico)?

Ao relacionar o histograma e a tabela os alunos devem perceber as características de um histograma, podem observar que as barras do histograma na vertical representam as frequências que podem ser alteradas, e na horizontal os intervalos de classes que não mudam e são de mesma amplitude. Com isso os alunos terão também um contato com gráficos e tabelas que estão associados e apresentam os mesmo dados.

Neste primeiro item da atividade, o professor pode se deparar com algumas respostas por parte dos alunos como:

- “Aumenta e diminui”
- “Dependendo do número, o número maior aumenta o gráfico, o menor diminui”
- “No gráfico, no número de alunos quando alteramos para um número 'alto' o gráfico aumenta e se colocar um número 'baixo' o gráfico diminui”.
- “modificando o número de alunos, o gráfico também mudou, e a média também”.

Com isso o professor pode fazer alguns questionamentos, aos alunos para que eles entendam porque isso acontece.

- 3) Que informação(ões) apresentada(s) na tabela (coluna) estão representadas no eixo horizontal? De que maneira estão organizadas?

O eixo horizontal, representa a amplitude total das notas (colunas notas), que estão organizadas em intervalos de amplitude dois.

Neste item algumas das respostas possíveis dos alunos são:

- “O eixo representa a média dos alunos”
- “quando o eixo horizontal é igual todos os números são iguais”

Neste item pode haver uma confusão com a média, já que ela passa pelo eixo horizontal, e também pode ocorrer de os alunos deixarem as frequências das notas todas iguais e com isso associar ao eixo horizontal, com isso o professor pode fazê-los refletir sobre o que realmente está no eixo horizontal e o que indica algo no eixo vertical. Também pode ocorrer de alguns alunos não saberem as direções horizontal e vertical, as quais o professor deve retomar, caso isso ocorra.

- 4) O que está representado no eixo vertical do gráfico? Que informação(ões) apresentada(s) na tabela altera(m) as colunas do gráfico?

Na eixo vertical do gráfico está representado o número de alunos que tiraram determinada nota, ou seja é a frequência em que aparece cada nota. O gráfico se modifica quando são alterados os valores da coluna N° Alunos na tabela.

Nesta questão podem surgir respostas como:

- *“Representa quantos alunos tiraram aquela nota, e nada interfere”*
- *“O eixo vertical, são todos os números diferentes”*
- *“Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7”*

O professor pode questionar essas respostas dos alunos, para que eles analisem porque estes números aparecem, e como interferem ou se relacionam com as colunas. E se fossem todos iguais, o que isto significa?

- 5) O que está representado pela linha vermelha? O que acontece com a posição que essa linha ocupa quando as quantidades são alteradas na coluna “N° Alunos” da tabela? Por que isso acontece?

A linha vermelha representa a média em dados agrupados das notas dos alunos da turma inteira, e esta média muda conforme a frequência de cada nota.

Neste item podem surgir respostas como:

- *“a linha vermelha se chama média, ela representa quanto o aluno pode tirar”*

Se os alunos não souberem o que é média, eles podem relacionar a média com o quanto os alunos podem tirar, pois eles só sabem que a nota deles no final de cada bimestre é determinada média, mas não sabem como foi calculada. Por isso os alunos devem saber como é calculada a média aritmética em dados discretos, para então com a tarefa os alunos com o auxílio do professor chegar na média dos dados agrupados, a qual utiliza o ponto médio de cada um dos intervalos em que os dados foram agrupados.

O professor pode sugerir que os alunos alterem os dados da tabela na coluna “N° Alunos” de modo que zerem a frequência das notas mais baixas e aumentem a frequência das notas mais altas, e vice-versa, para que observem o que acontece com o valor da média.

- 6) Existe valor máximo e valor mínimo para a linha vermelha? Quais são eles?

Neste item deve ser observado que os valores mínimos e máximos que a média pode atingir é 1 (ponto médio do primeiro intervalo) e 9 (ponto médio do último intervalo), pois a média é calculado usando intervalos com amplitude dois, e para calcular essa média é feito o ponto médio de cada amplitude e em seguida multiplicado pela frequência de cada intervalo de notas, e por fim dividido pelo número total de alunos. Logo a média não poderá ser 0 e 10.

As respostas citadas pelos alunos poderão ser:

- “0 e 10”
- “não existe valor máximo ou mínimo”

As colunas na tabela referente à “%” e a “Freq. Relativas” não foram abordadas nas questões que serão respondidas pelos alunos, mais em caso de questionamentos dos alunos referentes a essas colunas, o professor pode explicar como foram calculadas essas frequências, ou em caso dos alunos já terem estudado estes conteúdos como a porcentagem o professor pode inserir questões que utilizem para análises essas duas colunas.

Sugestão de questões para utilizar a Freq. Relativa e a frequência em Porcentagem: Como foram/são determinados os valores nas colunas “Freq. Relativa” e “%”? Em que eles diferem da coluna “Nº Alunos”? Explique seu raciocínio. Ou somente: Como foram calculados e o que representam os valores da coluna “%”?

Em caso de abordar a Frequência em Porcentagem ou a Frequência Relativa na tarefa, os alunos ao efetuarem os cálculos correspondentes às colunas irão perceber que os valores estão arredondados e podem questionar o professor quanto a isso, então o professor pode explicar quais são os critérios de arredondamento.

Tarefa 3: eleições

Jocemar Pontes Ribeiro

Clara Caroline Uniat

William Burgardt de Souza

Everton José Goldoni Estevam

Dirceu Scaldelai

Em um ano eleitoral foi feita uma pesquisa de intenções de votos com 360 eleitores. Havia três candidatos disputando a eleição e foram levados em consideração aqueles eleitores que votariam em branco ou que ainda estavam indecisos. Com os dados coletados foram construídos uma tabela e um gráfico de setores.

Objetivos da tarefa

- Relacionar uma tabela de distribuição de frequências com um gráfico de setores, fazendo a interpretação dos dados da tabela e do gráfico;
- Aprender conceitos de setor circular e identificar proporcionalidade entre os ângulos e a frequência relativa que sustentam um gráfico de setores;
- Retomar conceito da regra de três;

Conhecimentos prévios

- Porcentagem, ângulo e proporção.

Seriação sugerida

- Sugere-se a exploração da tarefa em questão a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, assim como nos anos subsequentes e no Ensino Médio, com aprofundamento das análises e discussões.

Orientações para o professor

Antes da aula

- Antes de iniciar a aula o professor deve verificar se os computadores da escola possuem o programa GeoGebra, em versão 4.2 ou superior.
- Salvar o arquivo “Tarefa_3_Eleições.ggb” em todos os computadores e verificar se o mesmo abre corretamente.
- Caso haja algum problema, pode ser utilizada a versão online do GeoGebra.

Introdução da tarefa

- O professor deve solicitar que os alunos abram o arquivo “Tarefa_3_Eleições.ggb”, que já estará salvo no computador.
- Ao entregar a tarefa aos alunos, o professor pode fazer uma leitura das questões em conjunto com eles.
- Explicar que os alunos podem/devem utilizar o arquivo do GeoGebra para responder as questões e que só devem alterar os dados da coluna B (Quantidade de Eleitores), sem digitar no valor de total (célula B6), que é calculado automaticamente.
- Para realizar as alterações dos valores devem apenas clicar na célula a ser alterada e digitar o novo valor, sem utilizar o “delete”, pois isso pode apagar os demais valores da tabela e desconfigurar o gráfico.

Desenvolvimento da tarefa

- 1) O que cada setor do gráfico representa?

Ao relacionar o gráfico de setores e a tabela os alunos devem perceber que cada setor representa a quantidade (proporção) de votos que cada candidato receberá.

Neste primeiro item da tarefa, o professor pode se deparar com algumas respostas por parte dos alunos como:

- “representa pedaços da pizza”
- “cada um tem uma cor diferente”
- “ $1/2$, $1/4$, $1/8$.”

Com isso, o professor pode fazer alguns questionamentos que levem os alunos a identificar “onde” estão localizados na tabela os dados representados por cada setor. Por exemplo, questionar: Que dados (números/valores) da tabela representam o setor em vermelho? E o setor em azul? Se os alunos revelarem dificuldades para identificar isso, o professor deve sugerir que façam alterações nos valores de tabela e observem o que acontece no gráfico, de modo a perceber “qual dado muda o que no gráfico”.

- 2) Considerando que uma circunferência tem 360 graus, que quantidade de eleitores é representada por 1 grau no gráfico de setores? Por quê?

A intenção desta questão é que o aluno relacione que 1 grau equivale a 1 eleitor (nesta atividade), seguida da explicação do seu raciocínio que seria porque nesta pesquisa o total de eleitores é a mesma quantidade de graus que uma circunferência (a qual sustenta o gráfico de setores) possui. Ou seja, que o aluno consiga perceber uma proporção de um para um entre graus e eleitores.

Neste item algumas das respostas possíveis dos alunos:

- “1, porque sim”
- “360 graus, porque é o total”.

Neste item o aluno não deve deixar de considerar o valor em graus da circunferência, caso contrário obterá maiores dificuldades na resolução do problema.

- 3) Se fossem pesquisados 540 eleitores, qual seria a relação entre graus e quantidade de eleitores?

Nesta questão a resposta seria de 1,5 eleitores para cada 1 grau, ou seja, que identifiquem a mudança na proporção existente.

Para a resolução o aluno pode utilizar o coeficiente de proporcionalidade ou uma regra de três simples, assim como as relações de proporcionalidade entre a porcentagem de quantidade de eleitores e o (ângulo) setor circular. Novamente, se os alunos tiverem dificuldades na percepção, ela deve ser “induzida” a partir das alterações dos valores da quantidade de eleitores e observação das mudanças ocorridas no gráfico de setores (observando que o total de eleitores também sofre alterações).

Nesta questão podem surgir respostas como:

- “1 e meio para cada grau”
- “não sei”

O professor pode questioná-los para que de alguma forma utilizem a regra de três ou de maneira analítica percebam que se 1 grau equivallesse a 1 eleitor haveria um total de 360 eleitores (situação anterior). Se 1 grau equivallesse a 2 eleitores, então haveria um total de 720. Dessa forma, pode-se pensar que deve ser algo entre 1 e 2 para que o total de eleitores seja 540, sendo que a diferença, seja para o 720 ou pra o 360 é exatamente a mesma, 180, isto é, a metade de 360.

- 4) Se a proporção fosse de 2 eleitores para 1 grau, quantos eleitores seriam consultados? Por quê?

Nesta questão a resposta seria de 720 eleitores, porque 2×360 é igual a 720, isto é, a ideia é que identifiquem e estabeleçam uma proporção de dois para um.

A intenção desta questão é a utilização da regra de três ou a constante de proporcionalidade como foi exemplificado no item anterior, para determinar a quantidade de 720 eleitores, seguida da explicação do seu raciocínio.

Neste item podem surgir respostas como:

- “não dá para relacionar com o gráfico”
- “dois para um”
- “um para meio”

Se os alunos não souberem que é possível fragmentar o ângulo, o professor pode interferir e dizer que na circunferência do gráfico o ângulo maior está dividido e isto pode ocorrer.

- 5) Sendo o total de 360 eleitores (situação inicial), qual a porcentagem de votos de cada candidato? E se fossem 900 eleitores e mantidas as porcentagens, quantos votos cada candidato receberia?

Nesta questão a resposta seria candidato 1: 25% dos votos, candidato 2: 12,5% dos votos, candidato 3: 12,5% dos votos e brancos e indecisos: 50% dos votos. Na segunda parte os alunos alteram os valores de eleitores até chegar no total de 900 eleitores, ou utilizam a regra de três.

A intenção desta questão é a utilização da regra de três conservando a porcentagem

As respostas citadas pelos alunos poderão ser:

- “todas diferentes”
- “não existe para 900 eleitores”.

Se os alunos não estiverem conseguindo, o professor pode interferir associando a situação em questão com as anteriores e explorando a representação do GeoGebra, de modo que o aluno perceba as alterações que ocorrem na tabela de frequência, particularmente na coluna de porcentagens, quando as quantidades de intenção de votos são alteradas. Além disso, pode ser que o aluno não se recorde do conceito de porcentagem ou não o tenha plenamente construído, o que confere à tarefa uma oportunidade para retomar ou discutir o significado da porcentagem enquanto uma fração (razão) de denominador 100.

6) Outra pesquisa foi feita, em que foram apontados os seguintes dados:

Candidatos	Quantidade de votos	Porcentagem
A	150	$30\% = 150/500 \cdot 100$
B	75	$15\% = 75/500 \cdot 100$
C	225	$45\% = 225/500 \cdot 100$
Branco e Nulos	50	$10\% = 50/500 \cdot 100$
Total de eleitores	500	$100\% = 500/500 \cdot 100$



Utilizando o total de eleitores e a quantidade de votos que cada candidato irá receber, determine a porcentagem de votos para cada candidato e complete a tabela acima. Em seguida determine proporções em graus dos ângulos dos setores circulares referentes a cada candidato e, seguindo as orientações abaixo, construa um gráfico de setores no GeoGebra.

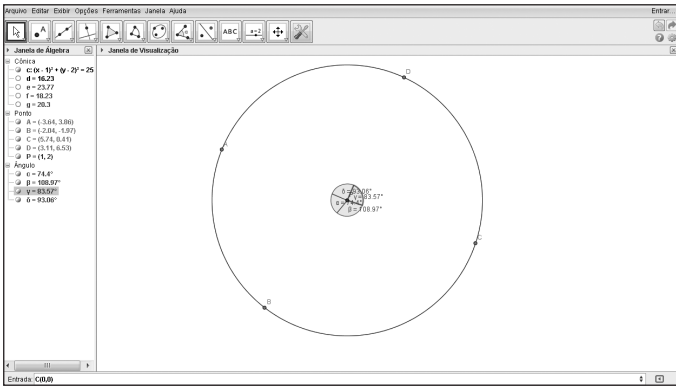
Para determinar os respectivos ângulos é necessário (re)lembrar da relação proporcional existente entre as frequências relativas (porcentagens) e os ângulos da circunferência. Após isso, a resolução pode se dar utilizando uma constante de proporcionalidade, que neste caso não é inteira (1, 38888...), mas que pode ser pensada como 50 para 36 ou 25 para 18. Com este raciocínio, o aluno não precisa utilizar regra de três para resolver. No entanto, há a possibilidade de utilização da regra de três simples para determinação dos respectivos ângulos. É importante


para que os alunos percebam os totais, isto é, as porcentagens sempre totalizarem 100 e os ângulos sempre 360°.

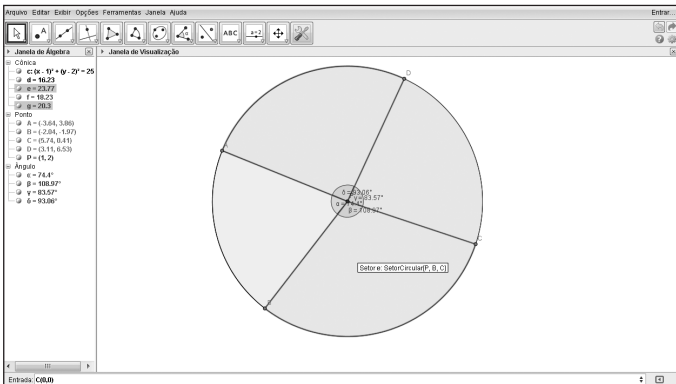
Para construção do gráfico de setores no GeoGebra você deve inicialmente abrir um arquivo em branco. Para tanto clique no menu superior em **Arquivo** e depois escolha **Novo**. Assim, aparecerá um arquivo em branco.


Será necessária a utilização da janela algébrica e da janela de visualização do GeoGebra. Caso alguma delas não esteja aparente, basta clicar no item **Exibir** no menu superior e depois em **Janela Algébrica** (para exibir a janela algébrica) ou **Janela de Visualização** (para exibir a janela de visualização).

- 1º. Crie um ponto P com as coordenadas (0,0). Para isso, digite na linha de entrada (parte inferior da janela) $P=(0,0)$.
- 2º. Crie um círculo digitando na linha de entrada (parte inferior da janela) o comando $\text{círculo}[(0,0), 5]$. Tal comando criará um círculo de centro no ponto (0,0) e raio 5.
- 3º. Como são 4 setores, devem ser criados 4 pontos sobre o contorno do círculo. Utilize a ferramenta *ponto*  (segundo ícone da barra de ferramentas) e clique em quatro pontos diferentes do contorno do círculo, criando assim os pontos que delimitarão os setores do gráfico.
- 4º. O próximo passo é estabelecer os ângulos de cada setor. Para tanto, vamos medir os ângulos iniciais delimitados pelos 4 pontos criados e depois ajustá-los àqueles que você calculou inicialmente. Utilize a ferramenta *ângulo*  (oitavo ícone da barra de ferramentas) e meça os 4 ângulos. Para tanto, clique em um dos pontos sobre o contorno do círculo, em seguida no ponto do centro e por fim no ponto que delimita o outro limite do setor (lembrando que o GeoGebra utiliza o sentido anti-horário para fazer a medição do ângulo). Em seguida, clique no ponto em que terminou a medição do ângulo para iniciar a medição do ângulo que segue, repetindo o procedimento anterior, conforme figura abaixo.



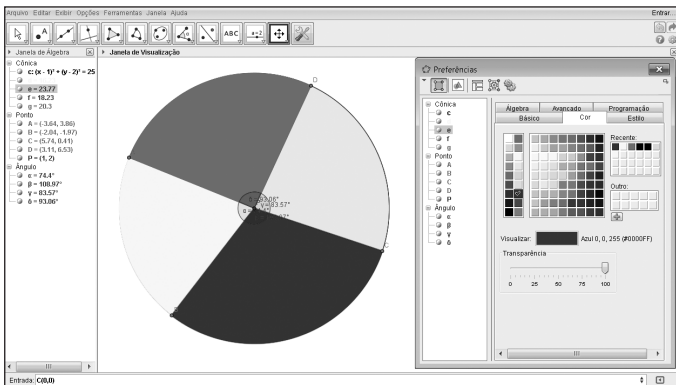
- 5º. Vamos criar os setores agora. Utilizando a ferramenta *setor circular*  (sexto ícone da barra de ferramentas) e crie os 4 setores, de modo semelhante ao que foi feito com os ângulo. No entanto, o primeiro clique deve ser dado no ponto central, para depois clicar no ponto sobre o contorno de círculo e, finalmente, naquele que delimita o setor circular. Vale a pena lembrar novamente que o setor também é criado no sentido anti-horário. Repita o procedimento criando os 4 setores, conforme figura abaixo.




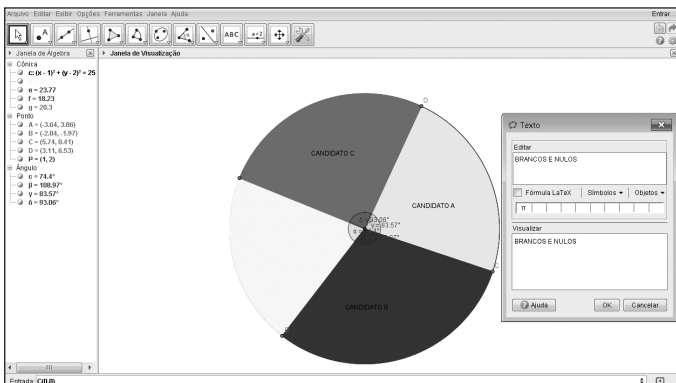
- 6º. Agora é preciso corrigir os ângulos de cada setor de modo a fazer a correspondência. Utilizando a ferramenta  (primeiro ícone da barra de ferramentas) e clique sobre os pontos que delimitam os extremos dos setores alterando seus ângulos. Percebam que quando movem o ângulo muda e o valor numérico (rótulo) também é alterado, tanto no gráfico quanto na janela de álgebra. Movimente-os até que cada um

deles corresponda àqueles estabelecidos para cada um dos candidatos, criando um gráfico de setores que represente aquela tabela inicial.

- 7º. Altere as cores de cada um dos setores do gráfico clicando com o botão direito sobre cada um dos setores, após em **propriedades** e em seguida em **cor**. Escolha a cor de preferência e coloque transparência 100. Repita o procedimento para cada um dos setores (figura abaixo).



- 8º. Finalmente identifique o que cada um dos setores representa. Para tanto, utilize a ferramenta de **texto**  (décimo ícone da barra de ferramentas) e clique sobre cada setor digitando o que ele representa, por exemplo, Candidato A (figura abaixo). E por fim dê um título para o gráfico.



Capítulo 4

O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL: CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

Henrique Cristiano Thomas de Souza²

Neste texto apresentamos os pressupostos que levamos em consideração ao propor um conjunto de cinco tarefas, utilizando o *software* GeoGebra, que conduzam aos conceitos relacionados à circunferência e ao círculo. Nesse sentido, primeiramente apresentamos o campo matemático e os conhecimentos específicos que estarão sendo contemplados nas tarefas. Para nortear o trabalho do professor que se utilize desse conjunto de tarefas discutimos sobre o caráter e as características que as constituem e também apresentamos de que maneira compreendemos o processo de avaliação. Finalizando, apresentamos as tarefas com orientações para o professor, nas quais são explicados os objetivos das tarefas, dos passos e conceitos matemáticos envolvidos.

Círculo e circunferência: construção de seus conceitos

A Geometria Euclidiana é um dos conhecimentos matemáticos mais antigos produzidos pela humanidade. O livro “Os Elementos” escrito por Euclides de Alexandria é apontado por Boyer (1996) como o livro de Matemática mais bem sucedido de todos os tempos. Trata-se de uma coletânea de textos que tratam dos mais diversos conhecimentos matemáticos, mais

2 Professor junto ao Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *Campus* de União da Vitória, Mestre em Educação Matemática (UFPR) e Doutorando junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

especificamente constrói as bases da Geometria que hoje denominamos de Euclidiana e foi escrito aproximadamente em 300 a. C.. Entretanto, historiadores da Matemática apontam que Euclides não produziu essa Geometria, mas apenas coletou e organizou-a através do método axiomático, ou seja, essa Geometria já estava sendo construída muito antes de Euclides. Isso é evidenciado por Gerônimo e Franco (2010), quando afirmam que a geometria surgiu há aproximadamente 4.000 anos no Egito e Babilônia, de uma maneira mais intuitiva e não sistemática, sendo aprimorada, num caráter mais dedutivo, na Grécia antiga por matemáticos, como Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, além, claro, de Euclides.

Mesmo que a partir do século XVI outras geometrias – tais como a Geometria Esférica, Geometria Fractal, Geometria Projetiva – tenham sido elaboradas e desenvolvidas, a Geometria Euclidiana não foi abandonada e ainda é prevista nos documentos que regem o ensino, no Brasil os Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998), no estado do Paraná as Diretrizes Curriculares (PARANÁ, 2008), como um conhecimento a ser trabalhado na Educação Básica, como podemos observar nos trechos a seguir:

Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). (BRASIL, 1998, p. 38)

Para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos: geometria plana; geometria espacial; geometria analítica; noções básicas de geometrias não-euclidianas. (PARANÁ, 2008, p. 55)

A contemplação enfática do ensino da Geometria Euclidiana nos documentos curriculares atuais pode ser o reflexo do ensino de Matemática no Brasil de décadas passadas. Barbosa (2006) afirma:

No Brasil, há anos atrás, houve um relativo abandono do ensino da Geometria à maneira de Euclides. Na prática, o que se passava era que o assunto era relegado para o fim do curso, e quase sempre não era ensinado. Isto devia-se em parte às dificuldades próprias do assunto e

em parte a uma certa influência da chamada, 'matemática moderna' que, embora utilizando a axiomática em outros tópicos, propugnava a eliminação da Geometria de Euclides no ensino básico. (p. iii)

Nesse sentido, buscou-se através de políticas educacionais e pesquisas no âmbito da Educação Matemática, que o ensino de Geometria Euclidiana ganhasse a importância que acreditamos que ela possui. O conjunto de tarefas que apresentamos nesse capítulo vem corroborar o compromisso de se contemplar o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica.

A Geometria Euclidiana é um campo do conhecimento matemático muito abrangente, seus elementos são objetos de ensino em todos os anos da Educação Básica. Logo, foi necessário refletir sobre qual(is) elemento(s) seria(m) mais adequado(s) desenvolver materiais de apoio pedagógico.

Nesse sentido, fomos buscar nos índices da Educação Básica, informações que nos indicassem os conteúdos que apresentam maior dificuldade na aprendizagem dos alunos, ou seja, aqueles que registram índices muito baixos de acertos.

De acordo com os resultados obtidos no Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná (SAEP) 2013 os índices de acertos em questões que envolviam o “descritor D40” – que previa “reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas relações” – foram abaixo do desempenho básico. Segundo os resultados da avaliação, apenas 27% dos alunos de 9º ano que realizaram a avaliação responderam corretamente as questões referentes a este descritor e somente 25,3% dos alunos da 3ª série do Ensino Médio o fizeram.

De posse dessas informações compreendemos ser coerente abordar os conteúdos de circunferência e círculo nas tarefas que estaremos propondo. As tarefas foram elaboradas de maneira que fossem abrangidos os seguintes conhecimentos específicos referentes à circunferência e círculo: definição de circunferência; cálculo do comprimento de uma circunferência; definição de círculo; e cálculo da área de um círculo. Vamos discutir mais sobre esses conhecimentos.

Definição de circunferência

A circunferência é um elemento da Geometria Euclidiana Plana que, para quem ensina Matemática, parece tão simples que muitas vezes

é apresentado em sala de aula com essa mesma simplicidade, sem se considerar que, para o aluno que está tendo seu primeiro contato com esse conhecimento, não seja tão simples assim.

Consideremos a seguinte definição: “*Circunferência é o conjunto de pontos de um plano que estão a uma dada distância constante de um ponto fixo do plano*” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 303). Nela podemos observar alguns conceitos não primitivos da Geometria Euclidiana Plana, como o de equidistância, o qual só é possível de ser entendido a partir do conhecimento de cálculo de comprimento de segmentos de reta e da congruência de segmentos que possuem a mesma medida; também, quando se define o conjunto de todos os pontos, está se utilizando a ideia de infinitude, pois, o aluno tem que supor a existência de todos esses pontos que estão equidistantes de um ponto fixo, centro da circunferência.

Podemos então verificar que esse conhecimento não é tão trivial como somos levados a pensar. Mas, então, como introduzi-lo de maneira que facilite seu entendimento? Foi pensando na resposta a este questionamento que construímos nossa primeira tarefa.

Esta tarefa foi estruturada de uma forma que o aluno que a realize construa o conceito de circunferência, ou seja, a partir da manipulação das ferramentas do GeoGebra, ele construa um elemento geométrico e caracterize-o de acordo com os passos utilizados em sua construção. Nessa perspectiva os conceitos de equidistância e infinitude, necessários para a definição de circunferência ser compreendida, são utilizados para sua construção e, portanto, utilizados para a caracterização de circunferência.

Cálculo do comprimento da circunferência

O cálculo do comprimento de uma circunferência (c) de raio (r) é determinado pela equação $c = 2\pi r$, em que π é o um número irracional com valor aproximado de 3,1416. Considerando isso, percebemos que é necessário ao aluno compreender quem é esse número representado por π .

Voltemo-nos para a História da Matemática por um instante. A construção do conceito de números irracionais foi um dos degraus históricos mais complicados para a Matemática. Foi apenas no século XVI que o matemático Augustin Louis Cauchy desenvolveu o conceito de números irracionais. Não podemos então pensar que o aluno da Educação Básica domine

tão facilmente um conceito como este. Entretanto, o problema do cálculo do comprimento de uma circunferência é antigo e foi trabalhado desde os primórdios da Matemática. Uma das maneiras históricas de se aproximar o comprimento da circunferência é através da inscrição ou circunscrição de polígonos na circunferência. Esse método pode ajudar o aluno a entender o comprimento da circunferência como o perímetro dela, ao relacioná-la com polígonos. Essa construção histórica levou-nos ao desenvolvimento da segunda tarefa aqui apresentada.

Historicamente também é possível verificar que o cálculo do comprimento da circunferência por aproximações de perímetros de polígonos inscritos ou circunscritos a ela foi sendo substituído – provavelmente pelo trabalho excessivo que este cálculo causava – por tentativas de cálculos exatos e menos trabalhosos, que em sua maioria buscavam o valor para o π . Nesses procedimentos evidenciava-se o método empírico da experimentação, em que se mediam os comprimentos de circunferências e seus respectivos raios na busca por uma razão comum a todas.

Foi nesse sentido que a terceira tarefa teve sua gênese. Nela os alunos são levados, a partir das construções realizadas, a identificarem essa razão existente nas circunferências e assim determinarem a equação para o cálculo do comprimento da circunferência.

Definição de círculo

O círculo tem muita semelhança com a circunferência, nesse sentido nossa quarta tarefa se assemelha à primeira. Nela, a ideia é que o aluno construa um círculo através da rotação por um ponto de um segmento de reta de comprimento fixo e , a partir dos elementos utilizados na construção, caracterize a figura formada.

Cálculo da área do círculo

O cálculo da área de um círculo entre todos os conceitos abrangidos em nossas tarefas parece-nos o com maior problemática no seu ensino, pois, normalmente a equação para seu cálculo é transmitida aos alunos sem que se a justifique.

Historicamente o cálculo da área do círculo também é realizado por aproximações, sendo que o mais famoso método é a quadratura do círculo proposta por Eudoxo. Entretanto, assim como no cálculo do comprimento

da circunferência, esses métodos apenas calculavam uma aproximação para a área do círculo ou necessitavam de conceitos muito avançados para a Educação Básica, como o método da exaustão.

Nesse sentido analisamos a maneira como o cálculo da área de outras figuras geométricas planas é apresentado em livros de Geometria Euclidiana Plana. Neles toma-se a área de uma figura plana que intuitivamente se concebe verdadeira como um axioma, por exemplo, a do retângulo, e se demonstra a área das outras figuras planas. É dessa maneira que se demonstra que a área de um círculo é obtida pela equação $A = \pi r^2$, entretanto, chega-se a essa equação com conceitos de tendências infinitesimais.

Para determinar a equação da área do círculo nessa linha de raciocínio, ou seja, utilizando-se de áreas de figuras planas já conhecidas, seguimos uma linha intuitiva em que o círculo de raio r é constituído por todas as circunferências com raio entre 0 e r e comparamos com a área de um triângulo retângulo formado com o “esticamento” e justaposição dessas circunferências. Por observação, nota-se que as áreas possuem a mesma medida, e que, utilizando a equação da área do triângulo, $A = \frac{bh}{2}$, em que b = comprimento da circunferência de raio r e h = raio do círculo, chegamos à equação da área do círculo.

As tarefas foram planejadas para serem aplicadas em conjunto, contudo, não necessariamente devam ser. O professor pode optar em trabalhar algumas partes dos conteúdos abordados utilizando-se de outra forma didática, porém, é importante que o mesmo observe os conhecimentos prévios que cada tarefa requer, podendo esta ficar prejudicada caso estes não sejam contemplados.

Características das tarefas

As tarefas que são propostas nesse capítulo evidenciam-se pela característica exploratória que possuem, ou seja, nelas a intenção é que os alunos sejam levados a um comportamento não estático em que a exploração ganha destaque.

A postura passiva do aluno não condiz mais com o perfil de cidadão crítico que se espera formar na Educação Básica, tanto que nas últimas décadas algumas formas de se romper com essa postura vêm sendo propostas e desenvolvidas. Podemos citar tarefas embasadas na Modelagem

Matemática, na Investigação Matemática, na Resolução de Problemas, e também com a utilização das Tecnologias da Comunicação e Informação.

Buscamos, então, por tarefas que, sem necessariamente serem caracterizadas em alguma metodologia de ensino específica, conduzem o aluno para uma postura ativa, contrária à postura passiva, na qual a independência para a construção do conhecimento se exalta, ou seja, as tarefas foram pensadas para que o aluno possa desenvolvê-las com o menor auxílio possível do professor.

Nesse sentido, a capacidade dinâmica do GeoGebra tornou-se primordial na construção das tarefas, pois, utilizando-se de suas ferramentas de fácil manipulação e acesso, o aluno pode construir elementos geométricos.

Nas cinco tarefas o aluno se utilizará de conceitos geométricos já conhecidos, como ponto, reta, segmento de reta e seu comprimento, polígonos e seus perímetros, área de triângulo, para construir utilizando as ferramentas do GeoGebra os conceitos de circunferência e círculo. E conforme as tarefas são realizadas, os alunos podem se valer dos conceitos construídos na(s) tarefa(s) anterior(es). Em todas as cinco tarefas é o aluno que, seguindo as orientações, constrói os elementos geométricos na interface do *software*.

Nas *tarefas 1 e 4*, a rotação por um ponto fixo de um segmento de comprimento fixo conduz a construção da circunferência e do círculo. Na tarefa 1 habilita-se somente o rastro – os locais que o elemento geométrico passa ficam marcados – de um dos pontos de extremidade do segmento; na tarefa 4 habilita-se o rastro do segmento todo.

Nas *tarefas 2 e 3* a construção de circunferências utilizando ferramentas do GeoGebra e através da observação e intuição, o aluno é levado a compreender o conceito e cálculo do comprimento de uma circunferência.

Na *tarefa 5*, a comparação da área do círculo e de um triângulo construídos pela justaposição de circunferências e segmentos de reta que dependem do raio variando entre 1 e 0, conduz o aluno à equação do cálculo da área do círculo.

Realizando essas construções, acreditamos que o aluno tenha uma compreensão mais ampla desses conceitos geométricos de circunferência e círculo, e que se sinta atuante no processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação

Apresentamos nossas considerações sobre como o processo avaliativo foi pensado para quando essas tarefas sejam aplicadas.

Como esclarecemos anteriormente, as tarefas deste capítulo foram produzidas com o intuito que o aluno ganhe papel de destaque no processo de ensino-aprendizagem, deixando de lado o papel passivo para um caráter prático, no qual são suas ações e reflexões sobre as tarefas que conduzirão sua prática escolar.

Nesse sentido, o processo avaliativo não pode estar pautado em ferramentas que julgam somente a correta reprodução de processos algébricos ou aritméticos, é necessário que se observe o desenvolvimento das tarefas considerando todo o processo.

As ferramentas avaliativas para se seguir essa ideia podem parecer ao professor tanto quanto subjetivas e podem não lhe dar muito respaldo frente ao atual sistema de ensino, que exige registros escritos e documentados que quantifiquem a aprendizagem dos alunos. Entretanto, podemos pensar em alternativas que possam considerar o processo de desenvolvimento das tarefas realizado pelo aluno e que possam fornecer ao professor esse registro documental escrito que lhe respalde.

Pelo caráter das tarefas, aconselhamos que ao final de cada uma sejam realizadas socializações para que os alunos exponham os seus raciocínios, conjecturas e conclusões que obtiveram durante a realização dessas tarefas. Nesse sentido, o professor pode solicitar que os alunos construam relatórios, anotações de seus desenvolvimentos, antes, durante e depois das socializações. A partir desses relatórios e das anotações que o professor fizer durante as socializações, o professor pode conseguir subsídios suficientes para realizar uma avaliação que seja condizente com o caráter das tarefas propostas.

É importante salientar também que o olhar que o professor deve ter sobre esses relatórios não pode ser o mesmo que em ferramentas avaliativas que buscam somente a correta reprodução de métodos. Deve observar a evolução e raciocínios que os alunos tiveram durante o desenvolvimento das atividades, pois, a avaliação é um processo que busca compreender se o aluno conseguiu aprender com a realização das tarefas. Reiterando, a avaliação é um processo, portanto, a aprendizagem pode ocorrer em qualquer fase desse processo, ou seja, não necessariamente precisa ocorrer em

um primeiro momento da realização da tarefa, mas, pode ser conseguida durante as socializações ou ainda na reflexão sobre seu desenvolvimento inicial e as discussões realizadas nas socializações.

O processo avaliativo pensado como um instrumento de aprendizagem requer que o professor retorne aos alunos aspectos de seus desempenhos para que possam assim observar seus pontos falhos e melhorarem seu desempenho. Os relatórios necessitam de uma leitura minuciosa e reflexiva por parte do professor para que este possa considerar todos os aspectos citados anteriormente. Nesse sentido, algumas ferramentas de avaliação podem auxiliar o uso dos relatórios e fornecer ao professor um bom apoio ao processo avaliativo.

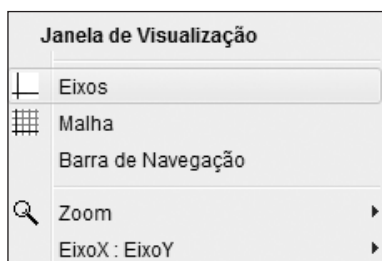
Por exemplo, tabelas avaliativas, nas quais o professor determina critérios que pretende observar durante a realização e discussão das tarefas, atribuindo conceitos bem definidos, tais como I (Insatisfatório), R (Regular), B (Bom), MB (Muito Bom), E (Excelente), que serão elencados de acordo com o desenvolvimento que o aluno tem durante a realização e socialização das tarefas, sempre considerando o caráter das mesmas, são boas alternativas para que o professor possa dar esse retorno aos alunos, já que são ferramentas, que se bem estruturadas, produzem uma avaliação rápida e de confiabilidade.

O professor pode pensar em outras ferramentas além destas citadas, mas, sempre considerando que o processo avaliativo para esse conjunto de tarefas deve ser condizente ao caráter que estas carregam, ou seja, o desenvolvimento pautado nas ações do aluno devem ser considerados e o conhecimento será construído durante esse desenvolvimento.

Tarefas com orientações para o professor

Para facilitar o desenvolvimento da sequência didática pede-se que o professor primeiramente solicite aos alunos que retirem a “**Janela de Álgebra**” e seus eixos. Para fechar a “**Janela de Álgebra**” é necessário somente clicar sobre x ;

Da mesma maneira clicando com o botão direito do *mouse* sobre qualquer eixo selecione o ícone “Eixos” (Figura 2), fazendo-se assim que seus eixos sejam retirados.



O próximo passo é aplicar as tarefas na sequência que serão apresentadas a seguir. Algumas orientações direcionadas ao professor são apresentadas durante os passos.

Referências

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 10. ed. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro-RJ, 2006.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Revisão de Uta C. Merzbach. Tradução de Eliza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é matemática: ensino fundamental, 8ª série*. 4 v. 2 ed. São Paulo: Ática, 2005.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. *Geometria Plana e Espacial: Um Estudo Axiomático*. 2. ed. Maringá: Eduem, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. São Paulo: Atual, 2009.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica*. Paraná: 2008.

GEOMETRIA: Círculo e Circunferência

Henrique Cristiano Thomaz de Souza

Norberto José Polsin

Natali Angela Felipe

Suelen Geronço

Isaias Guilherme de Souza Boruch

Celine Maria Paulek

Matheus Mauricio Novinski


Jackson Rodrigo Soares

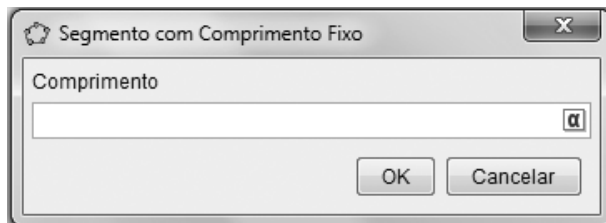
Cristiane Katchoroski

Marcelo Moreira

Tarefa 1

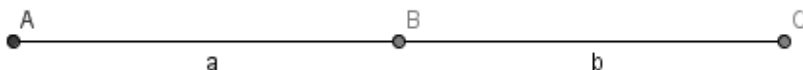
O objetivo desta tarefa é introduzir o conceito de circunferência.


- 1º. Crie um segmento de comprimento fixo utilizando a ferramenta “segmento com comprimento fixo” . Clique na janela de visualização e digite um valor entre 1 e 5 para o comprimento do segmento. A ferramenta nomeará dois pontos “A” e “B”, que são as extremidades do segmento criado;



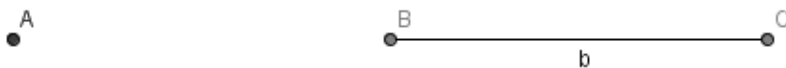
- 2º. Novamente utilizando a ferramenta “Segmento Com Comprimento Fixo” crie outro segmento. Depois de selecionar a ferramenta, clique no ponto “**B**” e na caixa que aparecerá digite o mesmo valor escolhido por você no 1º passo desta tarefa. O programa nomeará como **C** a outra extremidade do segmento;


*Os segmentos **AB** e **BC** de comprimento fixo criados serão o raio da circunferência a ser construída no próximo passo. É importante que o segundo segmento **BC** seja criado com extremidade em **B** (que será o centro da circunferência) para que os segmentos não fiquem sobrepostos e que posteriormente seja possível a comparação entre o ponto **A** e o rastro do ponto **C**. A figura abaixo representa como ficará a construção depois do 1º e 2º passos.*



- 3º. O próximo passo será ocultar um dos segmentos criados. Clique com o botão direito sob o segmento AB e em seguida, clique na opção “Exibir Objeto”  Exibir Objeto;


Como objetiva-se criar uma circunferência, um dos segmentos será ocultado para que a visualização e análise da figura a ser formada sejam facilitadas. Contudo, isso pode ajudar em questões posteriores o professor explicar o que é raio.



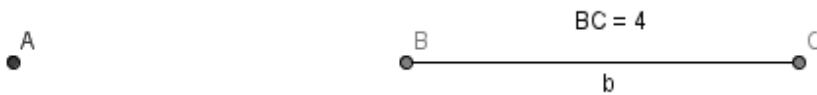
- 4º. Clique com o botão direito sob o ponto C e em seguida utilize a opção “Habilitar Rastro”  Habilitar Rastro;


*Ao habilitarmos o rastro, o software demarcará os espaços por onde o ponto **C** (a ser movimentado) passou.*



- 5º. Selecione a ferramenta “Distância, comprimento, perímetro”  e depois clique nos pontos **B** e **C**.

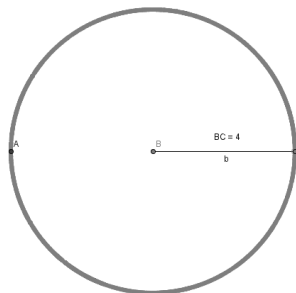
*A medida do segmento **BC** é habilitada para que em questões posteriores o aluno perceba que mesmo deslocando o ponto **C** essa distância não se altera. A imagem abaixo ilustra como ficará a construção até esse passo, utilizando um comprimento para os segmentos igual a 4.*



- 6º. Usando a ferramenta “mover” , desloque o ponto “**C**” em qualquer direção;

*O ponto **C** pode ser movido em qualquer direção, pois está limitado à mesma distância de **B**, já que é extremidade do segmento **BC** (que também é o raio). Quando se completa 360º, o rastro do ponto **C** formará a circunferência desejada.*

Segue abaixo um exemplo da construção com todos os seus passos concluídos:



Agora que você fez a construção no Software, responda:

- 1) Depois de movimentar o ponto **C**, que relação você pode observar entre seu rastro e o ponto **A**?

*As respostas esperadas nesse questionamento estão relacionadas a: o ponto **C** se aproxima e distância de **A**, ou ainda, que o de acordo com a movimentação o ponto **C** sempre passará (ou ficará sobre) o ponto **A**.*

- 2) Quando você movimenta o ponto **C**, o que acontece com a medida do segmento **BC**?

*As respostas aqui vão ao encontro da não alteração da medida de **BC**, ou seja, a medida do segmento **BC** não se altera.*

A partir disso o professor pode introduzir o conceito de raio perguntando: Como vocês nomeariam esse segmento?

Segue a definição de raio: Chama-se de raio qualquer segmento de reta de comprimento fixo e que possuam extremidade em um ponto fixo.

- 3) Descreva a figura formada pelo rastro do ponto **C**.


Esta pergunta pode render diversas respostas diferentes, como círculo, bola, roda e outras, contudo, caberá ao professor realizar a socialização das respostas dadas pelos alunos e a partir delas formalizar a definição desta figura formada que é a circunferência.

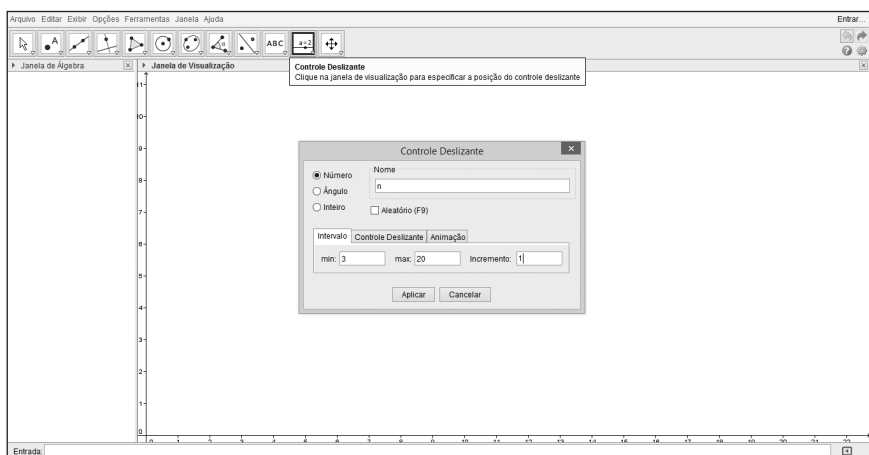
A definição formal de circunferência é: “Circunferência é o conjunto de pontos de um plano que estão a uma dada distância constante de um ponto fixo do plano.” (IEZZI; DOLCE e MACHADO; 2009, p. 303).ⁱ

*Em concomitante a definição o professor pode realizar as seguintes perguntas até para ajudar a formá-la: Qual é a distância entre os pontos **B** e **C**? Essa distância se altera? Então todos os rastros de **C** estão a mesma distância de **B**?*

Tarefa 2


Objetivo: Perceber que conforme se aumenta os lados de um polígono inscrito em uma circunferência o seu perímetro se aproxima do comprimento de uma circunferência.

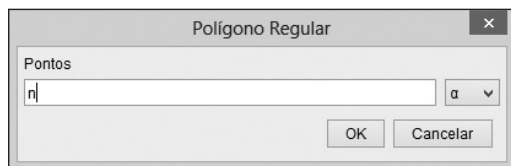
- 1º. Primeiramente deve-se construir um seletor, clicando em “controle deslizante”  e em qualquer lugar sobre a janela de visualização, nomeando-o de n e alterando o intervalo mínimo para 3, o máximo para 20 e o incremento para 1, selecionando aplicar;



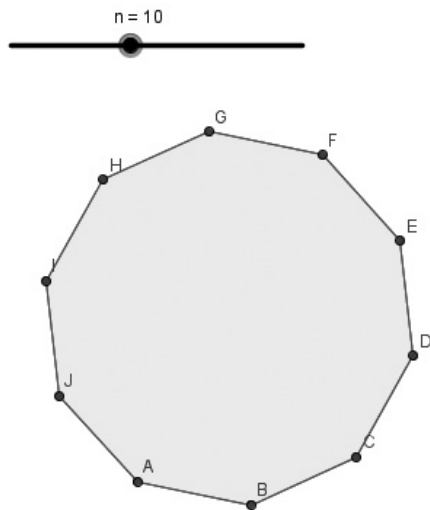
O seletor n é criado para que depois com a construção do polígono possamos alterar o número de lados do mesmo movendo apenas este seletor. O valor de mínimo do seletor é alterado para 3, pois sabe-se que como a função do seletor será a de alterar o número de lados do polígono, não há como se obter um polígono com menos de 3 lados. O valor de máximo é alterado para 20 por questão de visualização, 20 é um número de lados que possibilitará os alunos conseguirem identificar a aproximação entre o polígono e a circunferência a ser criada em passos posteriores. O incremento também deve ser alterado para 1 devido a variação entre o números de lados ser de um a um, pois não há como existir com polígono de por exemplo, 3,01 lados.


Neste passo da tarefa o professor pode lembrar aos alunos o que é um polígono, de maneira formal: polígonos regulares têm todos os lados e também todos os ângulos internos com medidas iguais. (DANTE, 2002, p. 185).

- 2°. Selecione a ferramenta “Polígono regular” . Construa dois pontos fixo **A** e **B** e em seguida aparecerá a seguinte janela, assim estipule a criação de um polígono regular de n vértices;



Cria-se o polígono com n vértices (ou pontos) para que o número de lados do polígono regular n varie de acordo com o seletor n configurado no passo anterior. Ou seja, isto se faz necessário para que o polígono altere de acordo com a movimentação do seletor que por consequência determinará o número de lados do polígono. Isto pode ser exemplificado pela figura a seguir:



1) Sabe-se que perímetro de um polígono é a soma dos valores dos seus lados. Quando aumentamos o valor do seletor n (com a ferramenta “mover”  selecionada) de 3 até 20:

a) O que ocorre com os lados do polígono regular criado?


R: Basicamente objetiva-se que os alunos respondam que os lados do polígono aumentam ou a figura aumenta, ou seja, aumentando o valor do seletor o número de lados do polígono também aumenta.

b) E com o perímetro?

Basicamente objetiva-se que os alunos respondam que o perímetro do polígono aumenta ou a figura aumenta, ou seja, aumentando o valor do seletor o perímetro do polígono também aumenta.

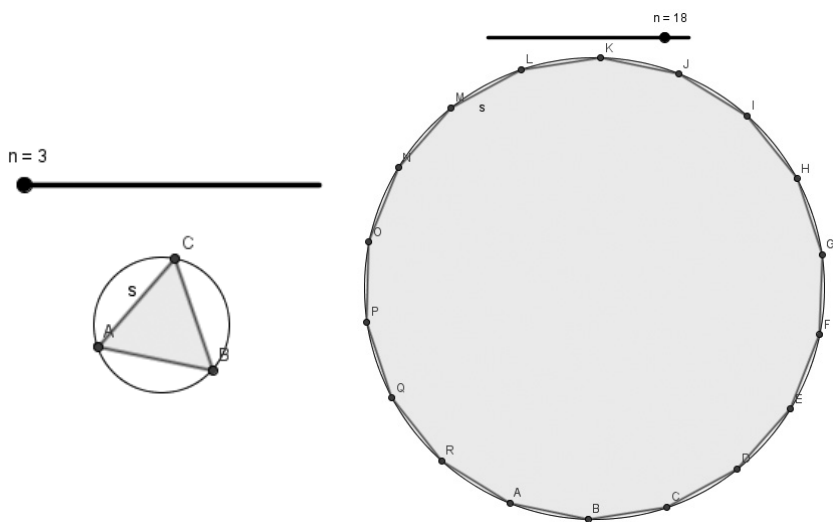
Seria interessante que o professor dar a orientação para que os alunos movam o seletor para cada valor de n de um em um para que tenham mais facilidade em perceber o que está acontecendo e então responder a questão.

Observação: Antes de iniciar o 3º passo mova o seletor novamente para $n=3$.

3º. Use a ferramenta “Círculo definido por três pontos” , clique em **A** e **B** (pontos fixos) e no outro ponto do polígono regular;

4º. Com a ferramenta “mover”  selecionada, mova novamente o “seletor n ”;

*Ao construir o círculo definido por três pontos que na verdade é a circunferência o polígono ficará circunscrito na mesma, mas para isto é que é necessário clicar nos pontos fixo **A** e **B** e posicionar o seletor em $n=3$, para que conforme for alterado o seletor e consequentemente os lados do polígono altere-se a circunferência também. Com esta construção e o movimento do seletor é que será possível o aluno perceber que conforme se aumenta o número de lados do polígono o mesmo tende a circunferência. A seguir uma figura referente à construção realizada:*




- 1) Observe o que ocorre com a circunferência e o polígono, conforme os valores de seletor n aumentam de 3 até 20. A partir do que foi observado, que relação pode ser estabelecida entre o perímetro do polígono e o comprimento da circunferência?

R: Aqui se espera que os alunos respondam algo parecido com: o perímetro do polígono regular vai ser próximo ou vai tender ao comprimento da circunferência. Aqui se o professor achar necessário pode-se retomar o que é circunferência, conceito abordado na tarefa 1.

E a partir das respostas dos alunos o professor pode fazer um fechamento de que o perímetro do polígono regular vai tender a ser igual o comprimento da circunferência. Assim o professor pode retomar com a turma como se calcula o perímetro de um polígono: Perímetro é a medida do comprimento de um contorno, ou seja, é a soma do comprimento de todos os lados de uma figura dada. (DANTE, 2005, p. 212).

Tarefa 3

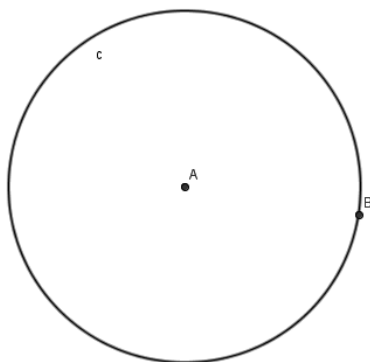
O objetivo da tarefa é que os alunos compreendam que $\frac{c}{2r} = \pi$, ou seja, $c = 2\pi r$.


- 1º. Selecione a ferramenta “Círculo definido pelo centro e um de seus pontos”  e construa uma circunferência c , ao construir a circunferência serão construídos também os pontos **A**(centro da circunferência) e **B**(ponto na circunferência);

*Com este item os alunos irão criar uma circunferência com centro em A e conseqüentemente criarão um ponto B na circunferência, desta forma o segmento **AB** a será o raio da circunferência;*

A figura abaixo mostra como deverá ficar a circunferência;

Se necessário o professor deverá relembrar o conceito de circunferência visto na tarefa 1;



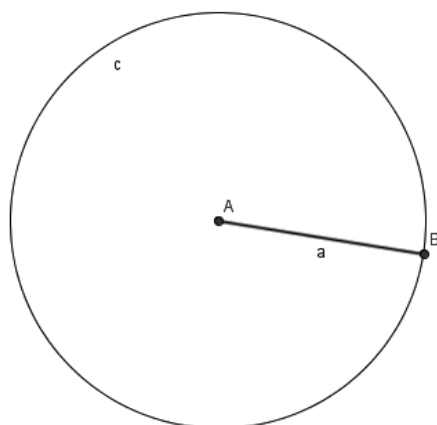
- 2º. Selecione a ferramenta “segmento de reta definido por dois pontos”  e construa o segmento de reta determinado pelos pontos **A** e **B**;


*Com este item os alunos deverão criar o segmento **AB** que é equivalente ao raio da circunferência.*

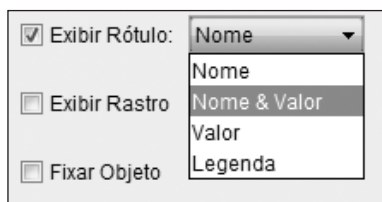
A figura abaixo mostra como deverá ficar a circunferência ao criar o segmento;

*Lembrando que o ponto **B** não possui um lugar certo para aparecer, ele poderá ficar em qualquer ponto pertencente à circunferência.*

Neste passo o professor deverá relembrar aos alunos o que é raio visto na tarefa 1.

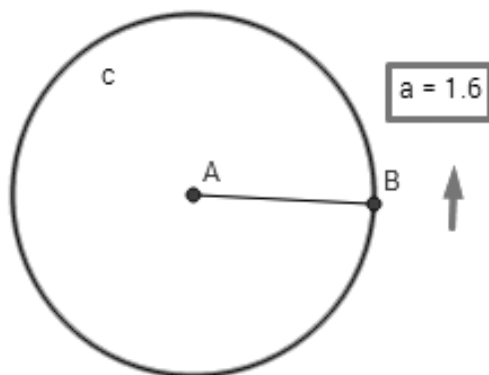



- 3º. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento a e selecione o ícone “Propriedades”  Propriedades ..., na opção “exibir rótulo” selecione a opção “nome & valor”;



Se necessário o professor deverá dizer aos alunos que a medida do segmento a é a medida do raio da circunferência;

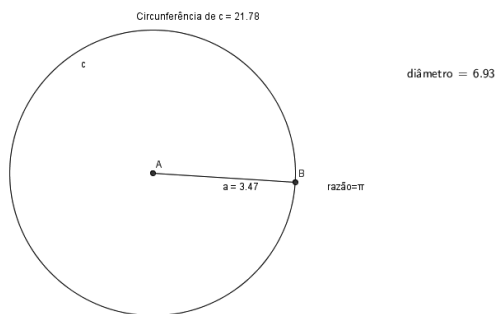
A figura abaixo mostra como deverá ficar a construção após de realizar o que se pede no 3º;




- 4º. Selecione a ferramenta “Distância, comprimento, perímetro”  e calcule o comprimento da circunferência **c**;

O professor se necessário deverá dizer aos alunos que o perímetro de uma circunferência é o comprimento da circunferência;

A figura abaixo mostra como deverá ficar a construção após este passo;



- 5º. Selecione a ferramenta “mover”  e movimente os pontos **A** e **B** da circunferência e anote os valores do perímetro e do raio. Repita o processo mais quatro vezes e anote os resultados obtidos e com auxílio da calculadora complete a tabela;

Observação: “Diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência. A medida do diâmetro é o dobro da medida do raio”

Com esse passo os alunos poderão completar as colunas correspondentes ao perímetro e ao diâmetro.

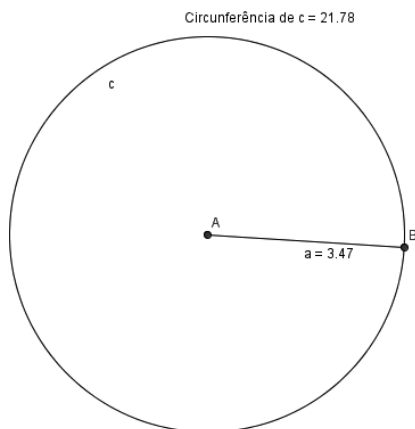
Um exemplo de preenchimento da tabela é apresentado abaixo:


	Perímetro	Diâmetro	Perímetro/diâmetro
1	14,39	4,58	3,13
2	13,07	4,16	3,14
3	19,42	6,18	3,14
4	16,96	5,4	3,14
5	20,43	6,5	3,14

Os alunos deverão chegar com a razão a valores próximos de 3,14.

- 6º. Digite na caixa de entrada o texto “razão=” + (perímetro)/(2*a));

Com este passo, queremos que os alunos observem que a razão do perímetro da circunferência, pelo diâmetro tende a resultar o valor de π , ou seja, 3,14.



- 7º. Selecione a ferramenta “mover”  e movimente os pontos A e B, observe o que acontece com o valor da razão, do perímetro, do raio e anote. Repita o processo quatro vezes e anote os resultados obtidos na tabela abaixo;

Um exemplo preenchido da tabela:

	Perímetro	Diâmetro	Razão
1	10,07	1,6	π
2	15,12	2,41	π
3	20,23	3,22	π
4	21,99	3,5	π
5	12,57	2	π

Aqui o professor deverá relembrar se necessário o que é o π e que o seu valor se aproxima 3,14;

Nesse passo os alunos repetirão a mesma ideia da primeira tabela, mas com valores diferentes, afim dos alunos completarem-na sozinhos e

para que possam responder as perguntas solicitadas após a tabela estar completa.

- 1) Que relação você pode estabelecer entre a os dados anotados na tabela?


Quanto é dividido o perímetro pelo diâmetro (duas vezes o raio), $Razão = \frac{Perímetro}{2 \cdot raio}$, temos que em ambas as tabelas os valores se aproximam de π , ou seja, se $c =$ comprimento da circunferência e $r =$ raio: $\frac{c}{2r} = \pi$;

- 2) Como pode ser reescrita a igualdade encontrada para determinar o comprimento da circunferência c ?

Devido à relação comprimento/diâmetro nas regiões circulares, conseguimos descobrir um valor constante, aproximadamente igual a 3,14. Esse número irracional ficou conhecido por “pi”, o qual é representado pelo símbolo π . Em qualquer região circular basta dividirmos o comprimento da mesma, pela medida do diâmetro, que encontraremos o valor correspondente a 3,14 aproximadamente. Com base nessa descoberta, o comprimento de uma região limitada por uma circunferência é calculada através da expressão matemática $c = 2\pi r$.


Tarefa 4

Objetivo: fazer com que os alunos compreendam o que é um círculo e o diferenciem da circunferência.

- 1º. Crie um ponto A usando a ferramenta “novo ponto” ;


O ponto A será criado para que a partir dele possamos criar todos os segmentos solicitados na tarefa. Ele será o centro de nosso círculo, que será formado ao final da tarefa.



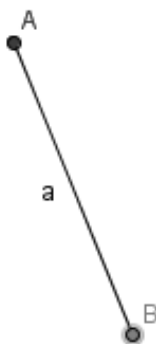
- 2º. Crie um segmento com comprimento fixo. Para isso utilize a ferramenta “segmento com comprimento fixo” . Crie esse segmento com comprimento fixo (digite o valor desejado) e início no ponto **A**, o programa nomeará o outro ponto de extremidade de **B**;

*Ao criarmos o segmento **AB**, estamos criando o raio do círculo. Se necessário o professor poderá relembrar o conceito de raio visto na tarefa 1. Pode-se colocar qualquer valor para ele, contudo, os valores dos segmentos **AB** (segundo passo) e **AC** (quarto passo) devem ser iguais. Caso se faça necessário, o professor pode relembrar o conceito de segmento de reta (visto tarefa 1) com os alunos.*



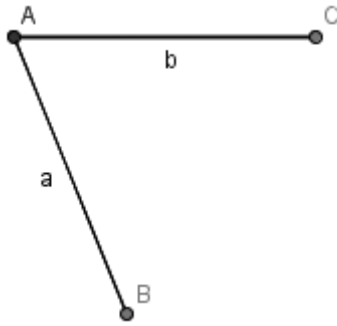
- 3º. Usando a ferramenta “mover” , clicar no ponto **B** e deslocá-lo; Os alunos deverão movimentar o segmento criado, para que ao realizar o próximo passo os segmentos não se sobreponham.

A imagem abaixo ilustra uma possível posição do segmento:



- 4º. Usar o mesmo procedimento já utilizado para construir um novo segmento de origem no ponto **A**, com o mesmo comprimento fixado, onde será nomeado o ponto da extremidade de **C**;

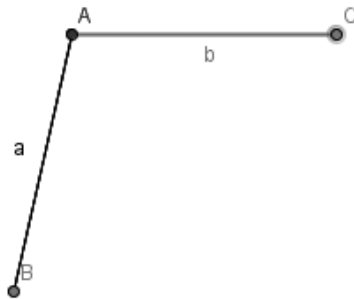
*Os alunos deverão criar um novo segmento com comprimento fixo que terá início no ponto **A**, e a medida deste novo segmento deverá ter a mesma medida do primeiro. Confira como pode ficar a construção:*




- 5°. Clicar com o botão direito sobre o segmento **AB** criado na opção “habilitar rastro”;
- 6°. Clicar com o botão direito sobre o ponto **B** na opção “habilitar rastro”; *Habilitar o rastro é importante, pois no oitavo passo iremos deslocar o ponto **B** e o segmento **AB**. Assim, por onde o segmento passar ela deixará uma marca, que ao final criará um círculo.*
- 7°. Clicar com o botão direito no segmento **AB** e selecionar a opção “propriedades”, “cor” e mude para uma cor diferente do segmento **AC**;

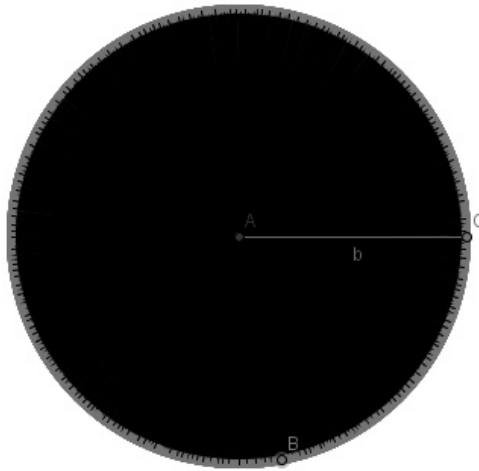
*O objetivo de se mudar a cor do segmento **AB** é que ele e o segmento **AC** possuam cores distintas e que desta forma, **AC** se destaque como raio do círculo.*

*Quando completarmos o oitavo passo e tivermos nosso círculo, teremos **AC** perfeitamente destacado como raio. A figura abaixo exemplifica como deverá ficar a construção até este passo.*



- 8°. Usando a ferramenta “mover”  deslocar o ponto **B**, que deslocará também o segmento **AB**.

Quando movermos o ponto **B** também moverá o segmento **AB**. Como habilitamos o rastro de ambos, os lugares onde os elementos passarem ficarão demarcados. Assim, teremos nosso círculo construído e atingiremos o objetivo final de nossa tarefa. Segue abaixo um exemplo de como poderá ficar a construção:



- 1) Movimentando o ponto B que figura foi formada?

A questão 1 pode render diferentes respostas entre os alunos, entre elas: bola, disco, roda e outras. Entretanto, nossa figura formada é o círculo.

- 2) O que difere essa figura de uma circunferência?

São várias as diferenças entre círculo e a circunferência. Contudo, a principal é que na circunferência consideramos apenas os pontos equidistantes de um ponto fixo chamado de centro, enquanto no círculo consideramos os pontos com distância menor ou igual ao ponto de centro. Nota-se esta diferença no conceito de ambos, os quais aparecem na tarefa 1 (circunferência) e tarefa 4 (círculo)¹.

- 3) Descreva como é formada essa figura:


Podemos utilizar a seguinte definição de círculo: “O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto dos seus pontos internos.” (IEZZI; DOLCE e MACHADO; 2009, p. 30)

1 A definição de círculo será apresentada na terceira questão.

Logo, podemos afirmar que um círculo é o conjunto de todos os pontos, em um plano, que estão à mesma distância ou a uma distância menor de um ponto fixo, chamado de centro.

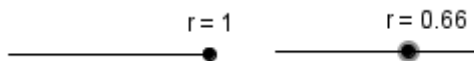
Tarefa 5

Objetivo: Deduzir a equação para o cálculo da área do círculo.

- 1º. Novamente deve-se construir um seletor, clicando em “Controle deslizante”  e em qualquer lugar sobre a janela de visualização, o nomeando de r e alterando o intervalo mínimo para 0 o máximo para 1 e o incremento para 0.0000001, selecionando aplicar.




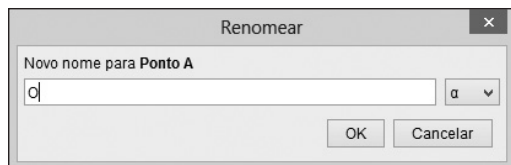
Este seletor é criado para que seja possível a construção de uma circunferência, a qual no decorrer da tarefa será preenchida e se tornará possível a dedução da fórmula para o cálculo da área de um círculo. Assim o seletor deve ser criado com o tamanho mínimo sendo 0, pois sabe-se que não existe raio negativo, seu máximo é alterado para 1, pois é usual criarmos circunferências com este valor de raio, porém nada impede deste valor ser alterado para um outro comprimento desejado. A figura a seguir exemplifica como ficará o seletor criado.




Quando o valor do incremento é alterado estamos alterando neste caso os intervalos que podem existir entre uma e outra circunferência quando altera-se o raio pelo seletor. Desta forma, usamos o incremento com o valor

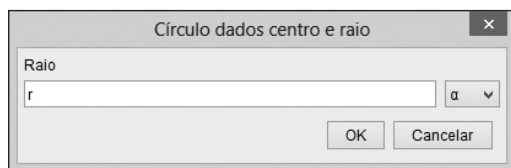
0.000010, para que em passos posteriores quando for habilitado o rastro da circunferência, que variarão de acordo com o seletor, ela forme-se o círculo, assim com este valor de incremento o preenchimento da circunferência ficará menos espaçada, ou seja, será mais fácil o seu preenchimento.

- 2º. Com a ferramenta “novo ponto selecionada”  crie um ponto, o nomeie como O, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto e selecione a opção “Renomear” e então digite O.

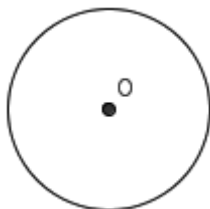


Ao criar esse novo ponto o mesmo será o centro da circunferência, a qual será criada no próximo passo. A sua nomeação como ponto O é apenas para indicar ele como o centro, a origem da circunferência.

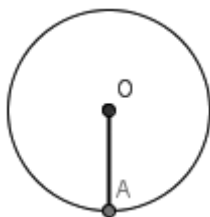
- 3º. Crie utilizando a ferramenta “Círculo dados centro e raio”  crie o centro e estabeleça o raio r.



Por mais que esta ferramenta tenha como nome “círculo” estamos criando uma circunferência. Esta circunferência é criada com raio r para que varie de acordo com o seletor que criamos nos passos anteriores. Desta forma quando movermos este seletor estaremos alterando o raio (o tamanho) da circunferência.



- 4º. Crie um segmento de reta para representar o raio desta circunferência, use “Círculo dados centro e raio” e selecione o ponto O e a parte inferior da circunferência. Também renomeie o ponto criado sobre a circunferência como ponto A.

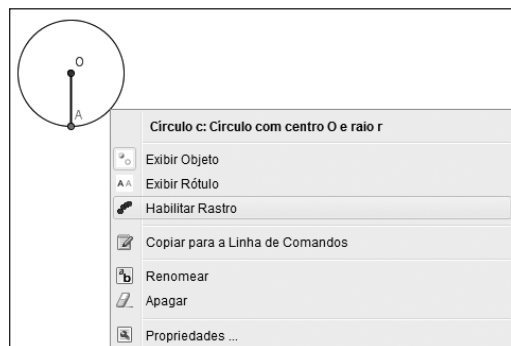


O segmento AO é criado para representar o raio da circunferência. Em passos posteriores esse raio representará também a altura do triângulo.

- 5º. Clicando sobre a circunferência com o botão direito do mouse selecione a opção “habilitar rastro”, para alterar a cor prosseguir da mesma forma selecionando “propriedades” e “cor”. Mova o seletor r criado



Ao mover o seletor com o rastro da circunferência já habilitado o software projetará (desenhará) todas as circunferências com os respectivos raios alterados pelo seletor, ou seja, a circunferência será preenchida por todas as circunferências com raios menores da inicial (menores que 1), formando o círculo. Pode-se observar esta construção nas figuras a seguir:



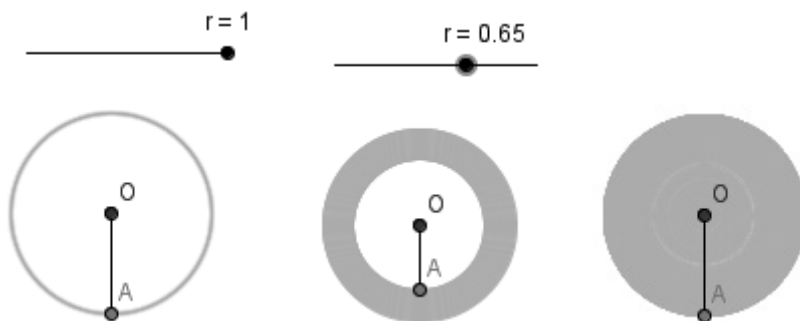
- 1) Quando movemos o seletor r o que ocorre com às circunferências a cada valor do raio?


R: Uma das respostas dos alunos poderia ser que a cada valor atribuído para o raio pelo seletor podemos perceber que a circunferência muda de tamanho. Ou ainda, que conforme move-se o seletor, as circunferências vão diminuindo e que isto preencherá a circunferência maior formando o círculo.

- 2) É possível relacionar a área do círculo com as circunferências criadas ao movimentar o seletor r ? Descreva essa relação?


R: Poderão surgir respostas como: Todas as circunferências irão preencher o círculo, então podemos somá-las. Ou ainda, a área do círculo será a soma de todas as circunferências. Porém objetiva-se chegar à: a soma do comprimento de todas as circunferências tende (ou será) a área do círculo formado.

Caso os alunos não consigam compreender a pergunta, o professor pode ajudar explicitando que o cálculo de área é realizado em superfícies, ou seja, de figuras planas, figuras “preenchidas”, assim espera-se que o aluno consiga responder mais facilmente o que foi descrito acima, relacionado a área do círculo com a soma de todas as circunferências de diferentes raios.

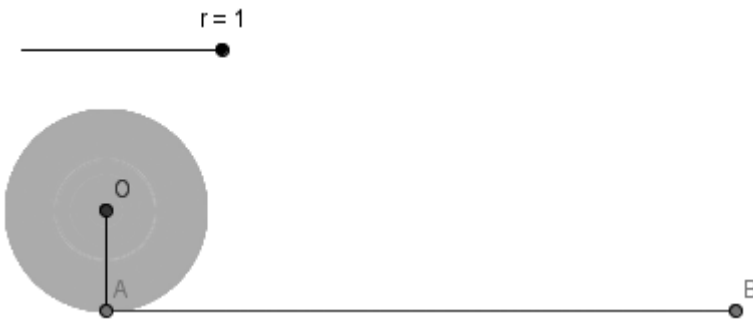
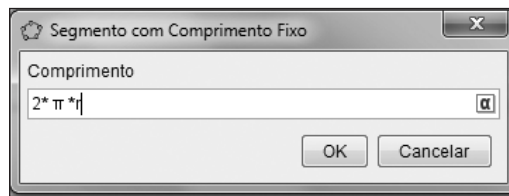



Observação: Antes de iniciar o passo 6º mova o seletor usando  de forma ao raio ser igual a um. Também mova o segmento AO para a parte inferior da circunferência, para isto ainda com a ferramenta mover selecionado, clique no ponto A e o desloque.

O segmento AO deve ser colocado na parte inferior da circunferência, pois em passos posteriores a projeção de todas as circunferências irão formar o triângulo pelo qual iremos calcular a área do círculo. Este segmento que representa o raio da circunferência também representará a altura do triângulo a ser formado em passos posteriores como foi descrito acima.

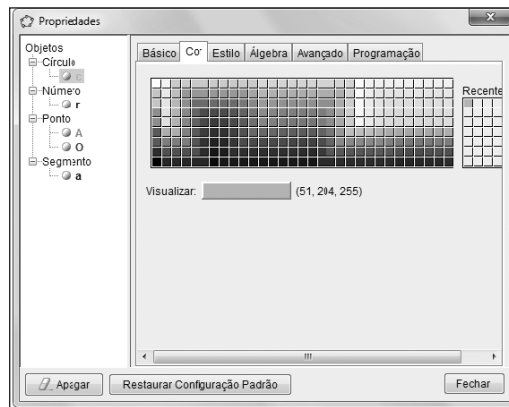
- 6°. Criaremos agora um segmento com o comprimento fixo igual ao perímetro da circunferência com início em A, ou seja, usando “Segmento com comprimento fixo”  e clicando no ponto A e na janela digitando $2\pi r$.

O segmento criado $2\pi r$, é o comprimento da circunferência (discutido na tarefa 3), tal que o raio também irá variar de acordo com o selector criado no início da tarefa, este segmento é criado com extremidade em A projetando a partir deste ponto o comprimento da circunferência dada. Veja a figura como deverá ficar a construção



- 3) Sabendo que a área do círculo pode ser calculada pela soma de todos os comprimentos das circunferências de diferentes raios, como podemos somar estes comprimentos? Para visualizar melhor também habilite o rastro do segmento (utilize o mesmo procedimento do 4º passo, porém escolha uma cor diferente). Novamente mova o selector r .

O comprimento da circunferência (segmento AB) tem seu rastro habilitado para que seja possibilitada a visualização da projeção do comprimento de todas as circunferências de raios diferentes que formará um triângulo. Em relação a resposta que os alunos podem dar sobre como somar todos os comprimentos das circunferências é previsto que eles não tenham respostas objetivas para este questionamento e devido a isto que é proposto a construção do triângulo, assim o professor pode retomar este questionamento após a construção da figura como é proposto na própria questão. Segue as figuras do passo a passo da construção:



$$r = 0$$



- 4) Todos os comprimentos das circunferências de raios entre 0 e 1 formaram que figura? A figura formada representa a área do círculo. Determine a área do círculo a partir da área da figura:

R: Espera-se que os alunos identifiquem que a figura formada é um triângulo e que o triângulo é retângulo. Caso apareçam dúvidas o professor pode lembrar os seguintes conceitos sobre Triângulos: “Dados três pontos A,B,C não colineares, chama-se triângulo os segmentos de

reta(lados) que unem esses três pontos”; “Se três lados são congruentes, o triângulo é equilátero”; “Se dois lados são congruentes, o triângulo é isósceles”; “Se dois lados quaisquer não são congruentes o triângulo é escaleno” (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2009, p.99); Triângulo Retângulo: “Se um dos ângulos é reto e os outros dois são agudos, o triângulo é retângulo. Exemplo: 90°, 35° e 55°”(IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2009, p.107). Também pode lembrar como calcular a área do triângulo: “A área de um triângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura dividido por dois $\frac{bh}{2}$ ”(IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2009, p.196))

Com essas informações o aluno pode calcular a área do círculo, utilizando principalmente a área do triângulo retângulo formado por meio da projeção de todas as circunferências com raios menores que 1. Podem surgir as seguintes dúvidas: Qual será a nossa base? Qual será a nossa altura do triângulo retângulo formado? O professor pode intervir para explicar que $2\pi r$ é a base do triângulo retângulo, pois foi “projetada” com a medida do comprimento da circunferência. A altura será o raio (segmento AO).

Usando a fórmula da área do triângulo retângulo e então substituindo a base por $2\pi r$ e a altura por r . Obtendo:

$$\frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Desta forma o professor pode-se finalizar a atividade sistematizando aos alunos que o cálculo da área do círculo é dada por πr^2 .

“Dizemos que o número do qual as áreas dos polígonos se aproximam (πr^2) é a área do círculo. $A = \pi r^2$ ” (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2009, p. 237).

Com a implantação de laboratórios de informática na maioria das escolas públicas brasileiras, percebe-se atualmente alguns contornos mais bem definidos em relação ao ensino de Matemática, que privilegiam a exploração de tecnologias digitais e, mais especificamente ainda, de recursos computacionais. De modo geral, essas discussões sugerem que os *softwares* direcionados ao ensino de Matemática, entre os quais destacamos o GeoGebra, utilizado em todas as tarefas deste livro, possuem forte potencial para facilitar a autonomia dos alunos a partir da exploração de ideias matemáticas e, por conseguinte, a apropriação dos conceitos e procedimentos com significado.

Nessa percepção, o presente livro abarca discussões teóricas e proposições práticas envolvendo *o GeoGebra e a Matemática da Educação Básica*, particularmente no campos das *frações, estatística, círculo e circunferência*. Trata-se de um convite à reflexão sobre as possibilidades que a exploração de um *software* de Matemática dinâmica agrega aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, o qual sugere alguns caminhos para os (novos) papéis que alunos e professores podem assumir neste contexto de ensino e aprendizagem.



ISBN 978-86-61868-84-0



9 788561 868840

