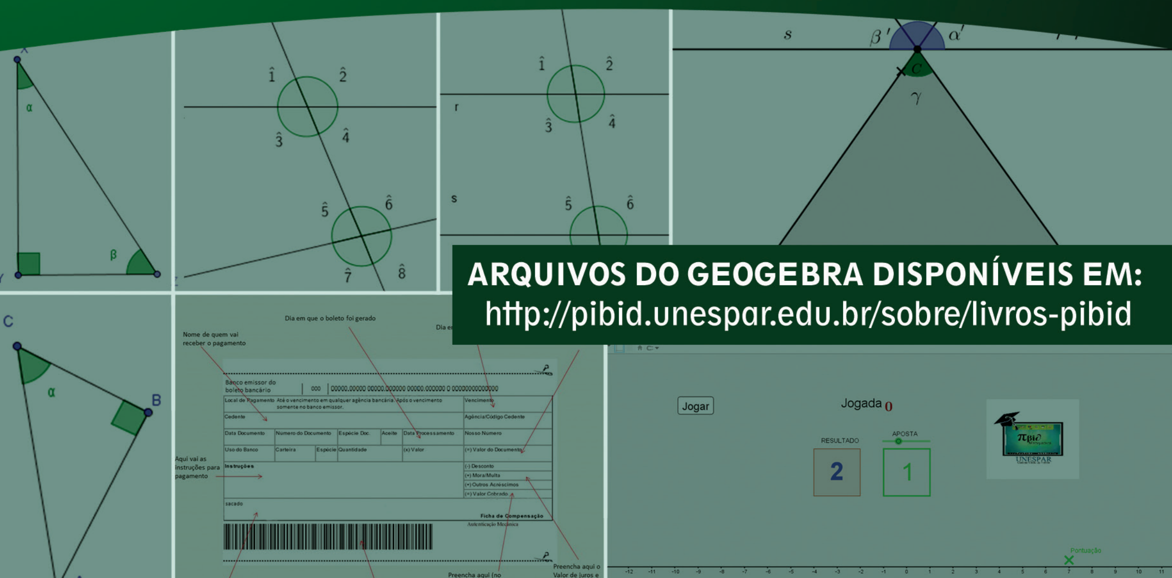
# O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica

Números Inteiros
Equações
Matemática Financeira
Ângulos e Razões Trigonométricas

**ORGANIZADORES**
**Maria Ivete Basniak**
**Everton José Goldoni Estevam**




**ARQUIVOS DO GEOGEBRA DISPONÍVEIS EM:**
http://pibid.unespar.edu.br/sobre/livros-pibid

# O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica

## Números Inteiros, Equações, Matemática Financeira, Ângulos e Razões Trigonométricas

MARIA IVETE BASNIAK
EVERTON JOSÉ GOLDONI ESTEVAM
Organizadores

Antonio Carlos Aleixo
*Reitor*

Sydnei Roberto Kempa
*Vice-Reitor*

Maria Simone Jacomini Novak
*Pró-Reitora de Ensino de Graduação*

Márcia Marlene Stentzler
*Coordenação Institucional*

Deise Borchhardt Moda
*Coordenação de Gestão de Área*
*Campus de União da Vitória*

**Organizadores**
Maria Ivete Basniak
Everton José Goldoni Estevam

Livro editado com recursos do CAPES/PIBID.

G345

O GeoGebra e a matemática da educação básica: números inteiros, equações, matemática financeira, ângulos e razões trigonométricas / organização de Maria Ivete Basniak, Everton José Goldoni Estevam - 1.ed. – Curitiba: Íthala, 2017.
76p.: il.; 22,5cm

Vários colaboradores
ISBN 978.85.5544.087.8

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. GeoGebra. 3. Professores - Formação. I. Basniak, Maria Ivete (org.). II. Estevam, Everton José Goldoni (org.).

CDD 372.3 (22.ed)
CDU 373.3

EDITORA ÍTHALA

Rua Aureliano Azevedo da Silveira, 49
82.030-040 | Curitiba-PR
Fone: +55 (41) 3093-5252
Fax: +55 (41) 3093-5257
http://www.ithala.com.br
E-mail: editora@ithala.com.br

**Revisão Ortográfica**
Fabricia Romaniv
**Projeto Gráfico**
Maiane Gabriele de Araujo
**Diagramação**
Paulo Schiavon
**Capa**
Maiane Gabriele de Araujo

# O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica

## Números Inteiros, Equações, Matemática Financeira, Ângulos e Razões Trigonométricas

MARIA IVETE BASNIAK
EVERTON JOSÉ GOLDONI ESTEVAM
Organizadores

EDITORA ÍTHALA
CURITIBA – 2017

# SUMÁRIO

# APRESENTAÇÃO

Atualmente, diversos são os materiais dedicados a discutir o ensino de Matemática e a associação de recursos tecnológicos a esse contexto. Nesse sentido, este segundo volume de *O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica*[1] poderia ser considerado apenas mais uma obra que se insere neste cenário com o intuito de apresentar possibilidades para exploração de recursos tecnológicos – no caso específico, o *software* GeoGebra – no e para o ensino de Matemática. Contudo, o contexto do qual esta obra deriva confere-lhe natureza distinta, transcendente à ilustração de possibilidades.

*O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica* emerge no contexto de discussões, ações e reflexões do subprojeto do Pibid – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, intitulado "Tecnologias e Formação de Professores para o ensino da Matemática". Trata-se, portanto, de um dos resultados do trabalho colaborativo de professores universitários (formadores de professores), professores da educação básica e alunos da licenciatura em Matemática (futuros professores), cuja pertinência e abrangência residem na multiplicidade de olhares, experiências e perspectivas que suportam as tarefas matemáticas que o compõem e, especialmente, os quadros de orientação e referência associados a cada uma delas.

Compreendendo tarefas como toda proposta de trabalho elaborada para os alunos e dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular, o grupo de participantes do Pibid se dividiu em três subgrupos, os quais investigaram, debateram, elaboraram e testaram propostas de trabalho com vistas ao desenvolvimento de ideias, conceitos e procedimentos matemáticos em campos distintos: Números e Álgebra; Matemática Financeira; e Geometria. A única dimensão comum a todos residiu na articulação dessas tarefas à exploração de tecnologias digitais, com vistas a integrá-las aos processos pedagógicos no campo da Matemática. Essa exigência, contudo, não foi estabelecida *a priori*, mas elaborada e negociada ao longo das ações e encontros do grupo, em que evidências acerca do potencial das tecnologias digitais, e, especialmente, do *software* GeoGebra, salientaram-se e foram problematizadas em associação às perspectivas metodológicas de ensino.

Nomeadamente, o grupo considerou que as tecnologias digitais podem ser promissoras quando se intenta práticas que colocam o aluno no centro do processo pedagógico, admitindo que a aprendizagem decorre do trabalho – individual e coletivo – que

---

1 O *e-book* do primeiro volume, dedicado a frações, estatística, círculo e circunferência, pode ser acessado em <http://www.pibidunespar.com.br/index.php/livros>.

este realiza a partir de tarefas desafiadoras para as quais não possui estratégias imediatas de resolução. Assim, as tarefas constituem convites à exploração e investigação por meio da elaboração de conjecturas, cujos testes podem conduzir à sua validação ou refutação a partir da negociação de significados e da elaboração de explicações e justificações para o(s) raciocínio(s) empregado(s). Esses aspectos corroboram a perspectiva do ensino exploratório de Matemática, a qual permeia, portanto, todas as tarefas e discussões que compõem este livro, cujas nuances e complexidades justificam os quadros de orientação para ações do professor associadas a possíveis ações dos alunos no processo de resolução, sem intentar, no entanto, esgotar a diversidade de estratégias, registros e ideias que podem emergir das atividades dos alunos.

Assim, o Capítulo 1 traz uma breve reflexão sobre possibilidades e potencialidades do *software* GeoGebra para o ensino de Matemática, especialmente na educação básica, muitas delas relacionadas às discussões e reflexões realizadas no grupo do Pibid.

O Capítulo 2, elaborado pelo grupo atuante no campo de "Números e Álgebra", apresenta discussões e tarefas sobre "Números Inteiros". As quatro tarefas que compõem esta seção recorrem a construções no GeoGebra para provocar a atribuição de significado aos números inteiros (positivos, negativos e o zero), e às operações (adição e multiplicação). A Tarefa 1 recorre a um "Jogo da Aposta" para trabalhar a ordenação dos números em uma reta numérica, com perdas e ganhos. A Tarefa 2 utiliza outra construção no GeoGebra, cuja exploração visa à compreensão da ideia de simétrico ou oposto – aspecto fundamental para a significação dos números inteiros. As Tarefas 3 e 4, por sua vez, associando o "Jogo da Aposta" a outras construções, representam situações que possibilitam, respectivamente, a significação das operações de adição (e subtração) e multiplicação no conjunto dos números inteiros, cuja generalização incide na "conhecida" regra de sinais.

O Capítulo 3, elaborado pelo mesmo grupo, discute as "Equações" sob a perspectiva da mobilização do pensamento algébrico em detrimento da manipulação simbólica. As duas tarefas que compõem a seção recorrem aos contextos de "Corridas de Táxi" e determinação da "Área de um Retângulo" para problematizar os conceitos de equação e incógnita e significar em que consiste o processo de resolução de uma equação.

O Capítulo 4, elaborado pelo grupo de Matemática Financeira, discute aspectos relacionados a "Juros Simples" e "Juros Compostos". As sete tarefas que compõem a seção recorrem a aspectos de situações reais para discutir inicialmente o raciocínio proporcional, o qual fundamenta o conceito de porcentagem e as ideias de acréscimos ou descontos. Nomeadamente, as três primeiras abarcam os conceitos de razão e proporção a partir da ampliação ou redução de imagens e da relação de medidas do corpo humano. A Tarefa 4, a partir de uma construção envolvendo um "Tanque de Combustível", problematiza o conceito de porcentagem. Por fim, as três tarefas finais, a partir do contexto de vendas, boletos e aplicações bancárias, problematiza de maneira dinâmica situações envolvendo acréscimos ou descontos diretos ou sucessivos, bem como a capitalização simples e composta.

Finalmente, o Capítulo 5 resulta do trabalho do grupo de Geometria que discute aspectos relacionados a “Ângulos” e “Razões Trigonométricas” sob o pressuposto de que a geometria dinâmica possibilita a compreensão de conceitos e teoremas, cuja visualização proporcionada pode oferecer condições para sua definição e demonstração. As três primeiras tarefas recorrem a construções dinâmicas do *software* GeoGebra para introduzir o conceito de ângulo e discutir características e propriedades desses ângulos em situações envolvendo paralelismo e concorrência de retas. Essas ideias são associadas a triângulos, na Tarefa 4, para explorar aspectos que justificam a soma dos ângulos internos desse tipo de polígono. A Tarefa 5, por sua vez, utiliza as ideias elaboradas na tarefa anterior para generalizar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. Finalmente, as Tarefas 6 e 7 exploram as razões trigonométricas em triângulos retângulos.

Trata-se, portanto, de um material que, para além de orientações à prática pedagógica dos professores que atuam na Matemática da educação básica, constitui um convite à reflexão sobre as redes de conceitos, procedimentos e ideias que suportam e significam a compreensão de um conceito matemático. Do mesmo modo, apresenta ideias complexas e proeminentes relacionadas aos modos como as tecnologias digitais – e, particularmente, o *software* GeoGebra – podem oferecer condições e suportes para percepção de aspectos-chave, identificação daquilo que varia e do que é constante em determinada situação, elaboração de conjecturas e testes, estabelecimento de estratégias diversas de resolução, organização de ideias e registros, e também de relações e elaboração de justificações. Nesse sentido, nossa intenção não é apresentar um material estático, pronto e acabado, mas constituir algumas propostas para ações pedagógicas em salas de aula da educação básica, cujos resultados certamente poderão contribuir para elucidação de questões relacionadas à integração das tecnologias digitais no ensino de Matemática, não como “modismo”, mas a partir das possibilidades singulares que estas podem originar para a compreensão e significação da Matemática.

Convidamos a todos aqueles que por algum motivo sentiram-se provocados ou incomodados com o material a se permitir o desafio de experienciar as propostas aqui apresentadas, cujo diálogo sustentado e a reflexão partilhada a partir da(s) prática(s) certamente oferecerão contribuições para o contexto de onde emergiram as propostas – o Pibid –, assim como para a Educação Matemática nos diversos níveis de ensino em que esta se faz presente. O convite e o desafio estão, portanto, lançados. Você aceita?!

Os organizadores

# Capítulo 1

# POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA[2]

Ao dissertar sobre o impacto das tecnologias digitais na forma de agir e pensar das novas gerações discentes, Prensky (2001) faz referência a uma geração de alunos “nativos digitais”, que nasceram e se desenvolveram em um contexto tecnológico digital que influenciou significativamente a forma de obtenção e processamento de informações.

Paralelamente a isso, Prensky (2001) aborda características dos “imigrantes digitais”, docentes dessa nova geração que tentam se adaptar à nova linguagem utilizada por seus alunos. Diante deste novo cenário, utilizar-se das tecnologias digitais para promoção da aprendizagem não se torna uma possibilidade na sala de aula, mas uma necessidade.

Conforme destacam Gravina e Basso (2012, p. 12), o quadro e o giz são tecnologias que tiveram seu papel de importância no processo educativo durante o século XIX. Na atualidade, as tecnologias digitais possibilitam viabilizar tarefas que deixaram o caráter estático de representações geométricas em segundo plano, por meio de um dinamismo que métodos convencionais certamente não possibilitariam.

A geometria dinâmica não é algo recente no cenário educacional, pois *softwares* como o Cabri Géomètre e o Geometriks já permitiam a realização de atividades contemplando dinamismo nas construções (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015). No entanto, foi a partir da primeira década do século XXI que o *software* GeoGebra possibilitou a integração de outros aspectos às construções, viabilizando o surgimento de novos cenários investigativos em educação Matemática.

Em particular, o GeoGebra se diferencia de outras ferramentas digitais por contemplar computação algébrica e geometria dinâmica simultaneamente. Estas funcionalidades permitem, além da representação geométrica, perspectivar cenários exploratórios ricos em elementos que contribuem para a aprendizagem de diversos ramos da matemática abordada na educação básica.

A possibilidade de efetuar construções geométricas e visualizar variações nas re-

2 Rodrigo Duda, mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa, Docente do Instituto Federal do Paraná – *campus* Irati, rodrigo.duda@ifpr.edu.br
Sani de Carvalho Rutz da Silva; doutora em Ciência dos Materiais pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *campus* Ponta Grossa, sani@utfpr.edu.br

presentações algébricas correspondentes permite que o aluno explore, encontre regularidades e efetue conjecturas acerca dos objetos que estão sendo construídos, de forma que sua atuação é similar a de um cientista no laboratório (BORBA; PENTEADO, 2015, p.37), testando e obtendo informações. Além das construções dinâmicas baseadas em comandos, é possível efetuar construções baseadas em parâmetros, que possibilitam, especificamente, explorar aspectos referentes à representação geométrica de funções reais mediante a variação destes parâmetros (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012).

Outro aspecto relevante é a possibilidade de abordagem de situações que provavelmente não seriam exploradas na perspectiva tradicional (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p. 392), pois o uso de ferramentas computacionais demanda menos tempo para a realização das construções, resultando em mais espaço para efetuar explorações.

Este cenário, rico em possibilidades de representações, favorece o trabalho docente no sentido de proporcionar o desenvolvimento de estratégias para promoção da aprendizagem via realização de tarefas, de forma que aspectos conceituais não sejam simplesmente repassados para o aluno, mas que sejam obtidos via explorações com construções dinâmicas.

No que diz respeito ao estudo de geometria plana e espacial, destacamos a possibilidade de construção de sistemas dinâmicos, viabilizando a exploração de aspectos conceituais da geometria. Gravina et al (2012) abordam também a utilização do *software* para atividades de cunho lúdico, mas que contemplam aspectos relacionados à aprendizagem conceitual de geometria: a modelagem geométrica.

Em consonância com a perspectiva exploratória, nossa experiência com o GeoGebra na educação básica nos permite vislumbrar um horizonte de possibilidades não apenas para o estudo de geometria e funções reais, mas também para a compreensão de aspectos relacionados a outros conteúdos, como números, álgebra e matemática financeira, uma vez que o GeoGebra possui também a funcionalidade de planilhas e controles deslizantes, que favorece o rápido processamento de dados e manipulação de objetos em tarefas exploratórias e experimentais.

Por fim, ressaltamos que apenas a utilização do GeoGebra em sala de aula não implica melhorias no processo de aprendizagem. Assim como todo recurso de ensino, se subutilizado, pode resultar em efeito contrário ao esperado, pois conforme destacam Giraldo; Caetano e Mattos (2012), a escolha de uma ferramenta computacional deve ser pautada em objetivos e habilidades que se quer desenvolver, de forma que o *software* escolhido seja efetivamente incorporado no processo de ensino e aprendizagem. Desta forma, é recomendável a constante atualização docente em relação às formas de utilização da ferramenta para que possa mediar e inquirir o aluno durante o desenvolvimento das tarefas.

## Referências

Borba, M. de C.; Penteado, M. G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 2).

Borba, M. de C.; Silva, R. S. R. da; Gadanidis, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Gravina, M. A.; Basso, M. V. de A. Geometria dinâmica na escola. In: Gravina, M.A. et al. (Orgs.). **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. p. 11-35.

Gravina, M. A. et al. Geometria dinâmica na escola. In: Gravina, M.A. et al. (Orgs.). **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. p. 37-60.

Giraldo, V; Caetano, P.; Mattos, F. **Recursos computacionais no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT, 06)

Prensky, M. Digital Natives, Digital Immigrants Part 1. **On the Horizon**, v. 9, n. 5, p. 1-6, 2001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1108/10748120110424816>. Acesso em: 19 abr. 2017.

Rezende, W. M.; Pesco, D. U.; Bortolossi, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do Geogebra. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 74-89, 2012. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8370/6580>. Acesso em: 19 abr. 2017.

# Capítulo 2

# NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL[3]

Ampliar a percepção do campo numérico não é algo simples para alunos do sétimo ano do ensino fundamental, especialmente porque até então sempre ouviram que "não é possível subtrair um número maior de um menor", o que é realmente verdadeiro quando operamos no campo dos números naturais. Entretanto, a partir do sétimo ano do ensino fundamental, a criança se depara com um novo conjunto de números, que normalmente os livros didáticos apresentam como números inteiros, mas que nem sempre obedecem a todas as propriedades daquele conjunto numérico, uma vez que os racionais negativos não fazem parte do conjunto dos inteiros. Assim, tomamos a concepção de Caraça (1998, p. 92) de que esses números são denominados relativos se "definidos a e b dois números reais quaisquer a diferença  que diremos positivo quando **a** > **b**, nulo quando **a** = **b** e negativo quando **a** < **b**.

As orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao ensino da Matemática e à exploração do campo dos números destaca que deve ser privilegiada a exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> - ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
> - selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação problema proposta (BRASIL, 1998, p. 64).

O documento traz ainda orientações de que:

> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, falta, orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses

---

3 Maria Ivete Basniak e Everton José Goldoni Estevam professores do Colegiado de Matemática da Unespar, *campus* de União da Vitória.

números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações (BRASIL, 1998, p. 66).

Nesse sentido, acreditamos que a criança já possui a ideia intuitiva de valores negativos, o que pode ser facilmente percebido quando brincamos com uma criança com jogos em que se ganham e se perdem pontos. Nossa experiência mostra que, em geral, as crianças conseguem operar intuitivamente com valores negativos em jogos, mesmo quando não operam ainda com números naturais. Ao jogar com uma criança em um jogo em que se perde um ponto quando se erra uma pergunta, se estiver com zero e responder errado, presenciamos que crianças respondem que está com “menos um ponto”, ou que está devendo um ponto.

Assim, tomando as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e nossa experiência do conhecimento intuitivo das crianças, optamos por tomar como referência para a introdução de números negativos um jogo construído no GeoGebra que denominamos Jogo da Aposta. Trata-se de um jogo que consiste em apostar em um número de 0 a 3 e verificar se este confere com o número sorteado pelo computador. O jogador inicia com 7 pontos e quando acerta o número sorteado ganha 2 pontos; se erra, perde 2 pontos. Entretanto, o jogador não precisa preocupar-se em anotar seus pontos e fazer as operações primeiramente, pois o GeoGebra registra a pontuação sobre a reta, deixando verde se essa é maior que zero e vermelha se é menor que zero (Figura 1). Portanto, para começar a jogar, basta selecionar um número em aposta e clicar em jogar. São 10 jogadas no total. Ganha o jogador que, ao final das 10 jogadas, ficar com um valor positivo. O número apostado pode ser o mesmo para as 10 jogadas, ou alterado a cada jogada, ou quando se desejar.

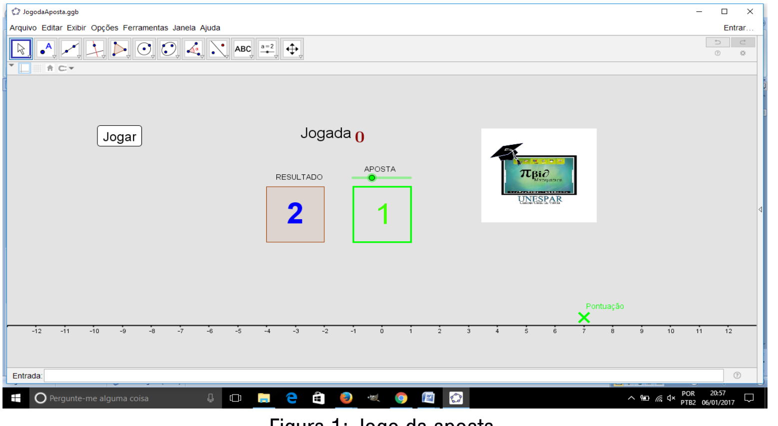


Figura 1: Jogo da aposta.

O jogo foi estruturado dessa forma a fim de permitir a exploração na introdução de valores negativos, como discutiremos nos encaminhamentos do material a seguir.

## Encaminhamentos do material

O material foi estruturado em quatro tarefas: Jogo da aposta, Simétrico, Comparação e Operações. Estas recorrem a cinco arquivos do GeoGebra: JogodaAposta.ggb, Simetrico.ggb, Operações.ggb, Multiplicacao.ggb e Multiplicacao2.ggb.

Na tarefa 1, intitulada Jogo da Aposta, em que deve ser utilizado o arquivo com o mesmo nome, objetivamos que o aluno observe primeiramente que temos números positivos e negativos na reta numérica e que a sua pontuação no jogo pode assumir qualquer um desses valores. Há, portanto, outro campo numérico além dos naturais e racionais.

A tarefa 2, Simétrico, utiliza o arquivo do GeoGebra Simetrico.ggb em que dois animais, um canguru e um coelho, saltam um determinado número de vezes de acordo com os valores selecionados nos controles deslizantes, nomeados de acordo com o animal correspondente. O objetivo é que o aluno compreenda que para cada valor à esquerda da reta numérica há um valor oposto que está localizado a direita, à mesma distância a partir do zero, e que, portanto, todos os números localizados à direita da reta numérica possuem um oposto à esquerda e vice-versa com o mesmo módulo.

Na tarefa 3 utilizamos novamente o arquivo JogodaAposta.ggb, a fim de que os alunos compreendam como são ordenados os valores na reta numérica, ou seja, que compreendam que embora a reta seja infinita de ambos os lados, os valores crescem da esquerda para a direita e, portanto, os valores mais à esquerda da reta são sempre menores que os que estão mais à direita.

Na tarefa 4 utilizamos dois arquivos do GeoGebra, JogodaAposta.ggb, Operacoes.ggb, a fim de que os alunos compreendam as operações de adição e subtração definidas nos inteiros entendendo que:

- Adicionar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).
- Adicionar um número positivo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).
- Subtrair um número positivo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).
- Subtrair um número negativo equivale a adicionar o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).

A partir dessas relações e utilizando os arquivos Multiplicacao.ggb e Multiplicacao2.ggb, na última tarefa, tarefa 5, pode-se construir com os alunos a "regra dos sinais" usada na multiplicação de inteiros.

## Critérios de avaliação

Os critérios de avaliação apontam aquilo que nós, professores, esperamos da aprendizagem de nossos alunos. Assim, dependendo do conteúdo abordado e da metodologia utilizada, assumimos diferentes critérios para avaliar a aprendizagem de nossos alunos e nosso trabalho no ensino dos conteúdos de Matemática. Portanto, buscamos de diferentes formas "medir" se os alunos conseguiram ter acesso e compreender conceitos fundamentais daquilo que trabalhamos, refletindo sobre o que precisa ser retomado futuramente e como deve ser abordado.

Frente às tarefas propostas, esperamos que os alunos consigam reconhecer o novo campo numérico localizando números inteiros na reta numérica, comparando e ordenando esses números. Além disso, almejamos também que os alunos consigam adicionar, subtrair e multiplicar inteiros, utilizando suas representações de forma correta. O professor pode verificar se esses objetivos foram alcançados durante o desenvolvimento das tarefas propostas, ou ainda criar outras situações similares.

## Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

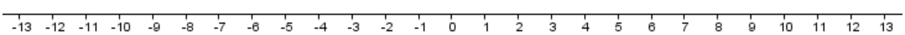
CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 1998.

# Tarefa 1 - Jogo da Aposta[4]

***Objetivo:*** *Localizar os números inteiros na reta orientada.*

O jogo da aposta começa com 7 pontos. Cada vez que você acertar o número escolhido, ganha 2 pontos e, se errar, perde 2.

Para começar a jogar, abra o arquivo **JogodaAposta.ggb**. Movimente o controle deslizante **aposta** e escolha um dos números: 0, 1, 2 ou 3. Depois, clique no botão **jogar**. O computador sorteará um número que aparecerá na caixa **resultado**. Verifique se o número sorteado foi o escolhido e observe que sua pontuação é registrada automaticamente na reta do jogo. Circule os valores de sua pontuação na reta representada a seguir. Realize 10 jogadas, sendo que o número escolhido pode ser alterado a cada jogada. Você vence se terminar o jogo com um número maior que zero.




Após terminar o jogo, responda as questões:

1. Qual foi sua pontuação final? Ele é um número negativo ou positivo?

4 Édino Andrioli, Norberto José Polsin Júnior, Suelen Geronço, Maria Ivete Basniak, Natali Angela Felipe, Simone Ribeiro, Cláudia Tratch, Letícia Oliveira.

*As pontuações variam. Os alunos devem observar se o número final obtido foi positivo ou negativo.*

2. Você deve ter observado ao jogar que a marcação da **Pontuação** fica verde ou vermelha dependendo da pontuação que você faz.

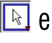
a) Para quais valores a **Pontuação** fica verde?
*Os valores marcados na reta maiores que zero ou os valores marcados na reta* à *direita de zero.*

b) Para quais valores a **Pontuação** fica vermelha?
*Os valores marcados na reta menores que zero ou os valores marcados na reta* à *esquerda de zero.*

*Aqui o professor pode discutir com os alunos como ocorre a localização na reta orientada, em que se tomou 0 (zero) para a origem de dois sentidos opostos, ou seja, de 0 para a direita o sentido é positivo e de 0 para a esquerda o sentido é negativo. A todo ponto à direita de 0 corresponde um número real positivo, e a todo ponto à esquerda de 0 corresponde um número real negativo; e ao 0 corresponde o próprio número zero.*

## Tarefa 2 - Simétrico[5]

***Objetivo:*** *Compreender valor absoluto ou módulo e números simétricos ou opostos. Para trabalhar a ideia de simétrico ou oposto, tomou-se como referência a semicircunferência pontilhada de raio* ***a*** *com centro em 0 (zero). Quando o coelho e o canguru estão nas extremidades da semicircunferência e as distâncias percorridas forem iguais, ou ainda os valores em módulo forem os mesmos, esses números são opostos ou simétricos.*

Abra o arquivo **Simetrico.ggb** do GeoGebra. Selecione a ferramenta **Mover**  e movimente os controles deslizantes ***canguru*** e ***coelho*** atribuindo-lhes os valores abaixo, sempre contando a distância percorrida a partir do zero.

1. *canguru = 8 coelho = -7*
a) Qual a distância percorrida pelo coelho? *7*

5 Norberto José Polsin Júnior, Édino Andrioli, Suelen Geronço, Maria Ivete Basniak, Simone Ribeiro, Letícia Oliveira.

b) Qual a distância percorrida pelo canguru? *8*
c) Quem percorreu a maior distância partindo do zero? *O canguru.*

2. *canguru = 7 coelho = - 8*
a) Qual a distância percorrida pelo coelho? *8*
b) Qual a distância percorrida pelo canguru? *7*
c) Quem percorreu a maior distância partindo do zero? *O coelho.*

3. *canguru = 7 coelho = - 7*
a) Qual a distância percorrida pelo coelho? *7*
b) Qual a distância percorrida pelo canguru? *7*
c) Quem percorreu a maior distância partindo do zero? *Os dois percorreram a mesma distância.*

4. *canguru = 8 coelho = - 8*
a) Qual a distância percorrida pelo coelho? *8*
b) Qual a distância percorrida pelo canguru? *8*
c) Quem percorreu a maior distância partindo do zero? *Os dois percorreram a mesma distância.*

5. Em quais situações as distâncias percorridas foram as mesmas? *3 e 4.*
*Neste momento, o professor pode finalizar a tarefa conceituando números simétricos ou opostos em que se representa por **a** o valor absoluto ou módulo de +**a** e, analogamente, **a** representa o valor absoluto ou módulo de -**a**.*

## Tarefa 3 - Comparação[6]

***Objetivo:*** *Comparar e ordenar números inteiros.*

Para começar a jogar abra o arquivo **JogodaAposta.ggb**. Observe que é o mesmo jogo da **Tarefa 1.** Movimente o controle deslizante **aposta** e escolha um dos números: 0, 1, 2 ou 3. Depois, clique no botão **jogar**. O computador sorteará um número que aparecerá na caixa **resultado**. Verifique se o número sorteado foi o escolhido e observe que sua pontuação é registrada automaticamente na reta do jogo. Realize 10 jogadas. Você vence se terminar o jogo com um número maior que zero.

Jogue e complete a tabela informando na segunda coluna se você ganhou ou perdeu a jogada e comparando (na quarta coluna) as pontuações iniciais (terceira coluna) e finais (quinta coluna) em cada jogada.

6 Suelen Geronço, Maria Ivete Basniak, Norberto José Polsin Júnior, Simone Ribeiro.

| Jogada | Ganhou (G) ou Perdeu (P) | Pontuação anterior | maior (>) ou menor(<) | Pontuação |
|---|---|---|---|---|
| 1ª | P | 7 | > | 5 |
| 2ª | P | 5 | > | 3 |
| 3ª | P | 3 | > | 1 |
| 4ª | G | 1 | < | 3 |
| 5ª | P | 3 | > | 1 |
| 6ª | P | 1 | > | -1 |
| 7ª | P | -1 | > | -3 |
| 8ª | P | -3 | > | -5 |
| 9ª | G | -5 | < | -3 |
| 10ª | G | -3 | < | -1 |

*O aluno deve registrar na tabela quando ganhar (G) quando perder (P), marcar a cada jogada a Pontuação anterior e a Pontuação atual e comparar os pontos observando qual é maior ou menor.*

1. Compare os resultados da sua **Pontuação** e escreva esses valores do menor para o maior (ordem crescente). Se houver valores repetidos, eles devem ser registrados uma única vez.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

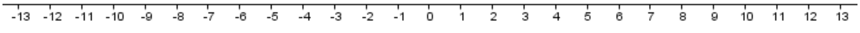
*O aluno deve colocar os valores da sua pontuação em ordem crescente*

2. Agora escreva do maior para o menor (ordem decrescente). Se houver valores repetidos, eles devem ser registrados uma única vez.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

*O aluno deve colocar os valores da sua pontuação em ordem decrescente.*

3. Compare a ordem dos valores registrados nos itens 1 e 2. O que você observa?
*O aluno deve responder que a resposta 2 é ordem inversa da resposta da questão 1.*




*O aluno deve responder do menor para o maior (em ordem crescente).*

5. Qual é o menor número que você obteve no jogo?
*O aluno deve responder com o menor número obtido.*

6. Qual é o maior número que você obteve no jogo?
*O aluno deve responder com o maior número positivo obtido.*

7. Quem é maior: -2 ou -1? Por quê?
*O aluno deve responder que -1 é maior. Porque está mais à direita na reta numérica.*

8. Consulte outros dois colegas e verifique a pontuação que cada um obteve. Quem obteve a maior pontuação final?
*Espera-se que os alunos comparem suas respostas e percebam qual é o maior valor. O professor deve sistematizar a tarefa discutindo com os alunos como ocorre a ordenação e consequentemente comparação dos inteiros, que segue a orientação da reta numérica, em que os valores crescem da esquerda para a direita.*

## Tarefa 4 - Operações[7]

***Objetivo:*** *Operar e definir números inteiros associando suas representações algébricas.*

Para começar a jogar, abra o arquivo **JogodaAposta.ggb**. Movimente o controle deslizante **aposta** e escolha um dos números: 0, 1, 2 ou 3. Depois, clique no botão jogar. O computador sorteará um número que aparecerá na caixa **resultado**. Verifique se o número sorteado corresponde ao escolhido e anote no quadro a seguir na coluna "VALOR GANHO OU PERDIDO NA JOGADA": +2 se ganhar do computador ou -2 se perder (a terceira e quarta coluna ficarão em branco, por enquanto). Realize 10 jogadas. Você vence o jogo se ficar com um número maior que zero no final.

| Jogadas | Valor ganho ou perdido na jogada | Operações | Pontuação |
|---|---|---|---|
| 1ª | *-2* | *7+(-2)* | *5* |
| 2ª | *-2* | *5+(-2)* | *3* |
| 3ª | *-2* | *3+(-2)* | *1* |
| 4ª | *-2* | *1+ (-2)* | *-1* |
| 5ª | *+2* | *-1+(+2)* | *1* |
| 6ª | *+2* | *1+(+2)* | *3* |
| 7ª | *-2* | *3+(-2)* | *1* |
| 8ª | *-2* | *1+ (-2)* | *-1* |
| 9ª | *-2* | *-1+ (-2)* | *-3* |
| 10ª | *-2* | *-3+ (-2)* | *-5* |

*Durante a tarefa os alunos devem jogar e anotar o valor ganho ou perdido em cada*

7 Maria Ivete Basniak, Suelen Geronço, Norberto José Polsin Júnior, Simone Ribeiro

*jogada, deixando as operações para serem realizadas posteriormente. Porém, também pode ser solicitado que os alunos anotem a pontuação, uma vez que esta aparece no jogo. Neste caso, quando forem completar o quadro, devem ser orientados a conferir a pontuação observando que é o resultado de uma soma.*

Para terminar de completar o quadro, preencha a coluna **operações** (terceira coluna) com:

valor da pontuação que possui + (valor ganho na jogada)

Abra o arquivo **Operacoes.ggb** mova o controle deslizante **a** para o valor da pontuação que possui e o controle deslizante **b** para o valor ganho na jogada. Após, marque a opção 

e anote o resultado na coluna **pontuação** (quarta coluna).

1. Qual foi o seu resultado final na sua última rodada? Você ganhou ou perdeu?
*A resposta dependerá dos resultados obtidos por cada aluno. O professor pode socializar e comparar os resultados de alguns alunos aproveitando para explorar as diferentes operações e discutindo a questão 2, em que se espera que compreendam as diferenças entre somar valores positivos, negativos, positivos com negativos e vice-versa.*

2. O que ocorre com o resultado de sua operação quando você soma:
a) Um número positivo a um positivo? *O resultado é um número positivo maior que os dois valores que adicionei.*
b) Um número positivo a um negativo? *O resultado pode ser positivo ou negativo, dependendo de qual era o maior valor absoluto. Nesse caso, eu diminuo o maior valor absoluto do menor valor absoluto e tomo o sinal do maior valor absoluto.*
c) Um número negativo a um positivo? *Idem ao item c. O resultado pode ser positivo ou negativo, dependendo de qual era o maior valor absoluto. Nesse caso, eu diminuo o maior valor absoluto do menor valor absoluto e tomo o sinal do maior valor absoluto.*
d) Um número negativo a um número negativo? *O resultado é um número negativo, menor que os dois valores adicionados.*
*Após pode-se discutir as propriedades de Adição dos números inteiros a partir das questões que seguem.*

Observe que **a** e **b** podem assumir inúmeros valores, por isso, na matemática dizemos que **a** e **b** são variáveis, pois variam conforme movemos os controles deslizantes. Assim, a expressão ***a + b*** se refere a inúmeras somas que podem ser realizadas, sendo que o resultado dessa soma dependerá de valores que forem atribuídos aos controles deslizantes.

3. Com o auxílio do arquivo **Operacoes.ggb**, realize as operações e responda as questões a seguir. Resolva primeiro a operação que está entre parênteses e colchetes.

a) (2 + 3) + (-1) = 5 + (-1) = *4 ou 2+3-1=4*

b) 2 + [3 + (-1)] = 2 + (+2) = *4*

3. O resultado depende da ordem em que foram realizadas as operações? *Não.*
*A partir das respostas pode-se formalizar a propriedade da associatividade da soma dos números inteiros. Ou seja, para quaisquer números a, b e c, se a operação de adição for realizada em qualquer ordem, o resultado sempre permanece o mesmo.*

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

*Para tal formalização algébrica, buscamos introduzir anteriormente a ideia de variável, entretanto, é necessário que seja novamente discutido aqui o que "as letras" representam.*

4. Com o auxílio do arquivo **Operacoes.ggb**, realize as operações e responda as questões a seguir.

a) 3 + (-4) = *-1*

b) -4 + (+3) = *-1*

5. O resultado depende da ordem das parcelas? *Não.*
*A partir das respostas pode-se formalizar a propriedade de comutatividade da soma dos números inteiros. Ou seja, para quaisquer números a e b, a ordem em que for realizada a operação de adição não altera o resultado.*

$$a + b = b + a$$

*6.* Com o auxílio do arquivo **Operacoes.ggb**, realize a operação: *0 + (-5) = -5*

7. Ao somar ou subtrair qualquer número com zero, qual será o resultado? *O valor do número.*
*A partir das respostas pode-se formalizar a propriedade de elemento neutro da soma dos números inteiros. Deve-se relatar que este é único e pode ser denotado pelo símbolo 0, chamado de elemento zero ou elemento nulo.*

$$0 + x = x$$

8. Com o auxílio do arquivo **Operacoes.ggb**, realize as operações e responda as questões a seguir.

a) 5 + (-5) = <u>*0*</u>
b) 20 + (-20) = <u>*0*</u>
c) 2 + (-2) = <u>*0*</u>

9. Ao somar um número com seu oposto, qual é resultado? <u>*0*</u>
*A partir das respostas pode-se formalizar a propriedade de elemento simétrico dos números inteiros. O elemento simétrico de* ***a*** *é único e é representado por* ***- a****. Logo, a adição de um elemento* ***a*** *e seu simétrico* ***- a*** *é 0 (zero). Dada a construção, o professor poderá utilizar analogias com* ***a*** *e* ***b****, para o oposto de um número.*
*a + (-a) = 0*

Observe que no arquivo **Operacoes.ggb** existem duas opções: ☐ a+b e ☐ a-b .
Para adicionar dois valores: selecione os valores de **a** e **b** movendo os controles deslizantes e após marque a opção ☐ a+b .
Para subtrair dois valores: selecione os valores de **a** e **b** movendo os controles deslizantes e após selecione a opção ☐ a-b .

10. Resolva as operações e complete com o sinal da operação equivalente:
a) 4 + (-7) = -3 = 4_7
b) 8 + (-10) = -2 = 8_10
c) 7 + (-2) = 5 = 7_2

11. Complete: Somar um número negativo equivale a <u>*subtrair*</u> o número positivo com o mesmo módulo. Então = ( - ) = <u>-</u>

12. Resolva as operações a seguir e complete com o sinal equivalente:
a) 5 + (+5) = <u>*10*</u> = 5_5
b) 7 + (+6) = <u>*13*</u> = 7_6
c) *3 + (+2)* = <u>*5*</u> = 3_2

13. Complete: Somar um número positivo equivale a <u>*somar*</u> o número positivo com o mesmo módulo. Então + ( + ) = <u>+</u>

14. Resolva as operações a seguir e complete com o sinal equivalente:
a) 3 - (+4) = -<u>1</u> = 3_4
b) 9 - (+5) = <u>4</u> = 9_5
c) 6 - (+8) = <u>-2</u> = 6_8
15. Complete: Subtrair um número positivo equivale a <u>*subtrair*</u> o número positivo com o mesmo módulo. Então - (+) = <u>-</u>

16. Resolva as operações a seguir e complete com o sinal equivalente:
a) 4 - (-2) = <u>6</u> = 4_2
b) 6 - (-3) = <u>9</u> = 6_3
c) 5 - (-4) = <u>9</u> = 5_4

17. Complete: Subtrair um número negativo equivale a <u>*somar*</u> o número positivo com o mesmo módulo. Então - (-) = <u>+</u>

*A partir dos itens 10 ao 17 pode-se formalizar com os alunos a adição de números inteiros que equivale a:*

- *Adicionar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).*
- *Adicionar um número positivo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).*
- *Subtrair um número positivo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).*

*Subtrair um número negativo equivale a adicionar o número positivo com o mesmo módulo (valor absoluto).*

## Tarefa 5 - Multiplicação[8]

***Objetivo:*** *Multiplicar números inteiros e construir a regra dos sinais.*

Abra o arquivo M**ultiplicacao.ggb** e movimente os controles deslizantes **a**, **b** e **c** e observe que as medidas dos lados superior e inferior dos retângulos são alteradas.

Podemos alterar o tamanho dos lados dos retângulos conforme movemos os controles deslizantes. Portanto, podemos representar algebricamente seus lados por letras que representam os valores que podem ser atribuídos ao movermos os controles deslizantes. Por exemplo, o lado do retângulo cinza mede **c**. Isso significa que terá a mesma medida que atribuirmos ao controle deslizante **c**. O lado do retângulo azul mede ***b*** - ***c***, portanto esse lado será alterado conforme movermos os controles **b** e **c**. Para sabermos quanto mede, diminuímos o valor atribuído a **c** de **b**. Se **b** vale 4 e **c** vale 1, então o lado do retângulo azul será ***b*** - ***c*** = 4 - 1 = 3

1. O retângulo verde é alterado quando movemos quais controles? *a, b ou c.*

8 Maria Ivete Basniak, Suelen Geronço, Norberto José Polsin Júnior, Simone Ribeiro.

2. Se deixarmos os controles com os seguintes valores $\boldsymbol{a} = 4$, $\boldsymbol{b} = 3$ e $\boldsymbol{c} = 1$, qual o valor da medida do lado superior do retângulo verde? <u>*2*</u>

3. Como é representado o lado superior do retângulo verde? $(a + c) - b$

4. E como é representado o lado inferior do retângulo verde? $a - (b - c)$

5. As representações estão iguais? *Não*.

6. Elas têm o mesmo tamanho? *Sim.*

7. Como podemos explicar a igualdade $(a + c) - b = a - (b - c)$?
$(a = c) - b = a - (b - c)$
$a + c - b = a - b + c$
$a - b + c = a - b + c$

Abra o arquivo **Multiplicacao2.ggb**. O controle deslizante **a** altera o valor do primeiro fator, ou multiplicando, e o controle deslizante **b d**o segundo fator, ou multiplicador. Clicando em **multiplicar**, você pode visualizar o resultado.

8. Realize as seguintes multiplicações:
a) 2.3 = <u>*6*</u>
b) 2. (-3) = <u>*-6*</u>
c) (-2).3 = <u>*-6*</u>
d) (-2).(-3) = <u>*6*</u>
*Caso considere necessário, o professor pode sugerir outras multiplicações.*
*Ao final o professor deve formalizar com os alunos as operações, buscando que compreendam que:*
- $(+a) \,.\, (+b) = (a - 0) \,.\, (b - 0) = +a \,.\, b$
- $(+a) \,.\, (-b) = (a - 0) \,.\, (0 - b) = -a \,.\, b$
- $(-a) \,.\, (-b) = (0 - a) \,.\, (b - 0) = -a \,.\, b$
- $(-a) \,.\, (-b) = (0 - a) \,.\, (0 - b) = +a \,.\, b$

*Portanto, vale destacar com os alunos que estamos operando em outro campo numérico diferente dos naturais e dos racionais positivos conhecidos até então. Conhecendo um novo campo numérico dos números inteiros que serão ampliados para os relativos: Sejam* ***a*** *e* ***b*** *dois números reais quaisquer chamamos de número relativo, a diferença* ***a - b*** *que diremos positivo quando* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$*, nulo quando* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *e negativo quando* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$*.*

# Capítulo 3

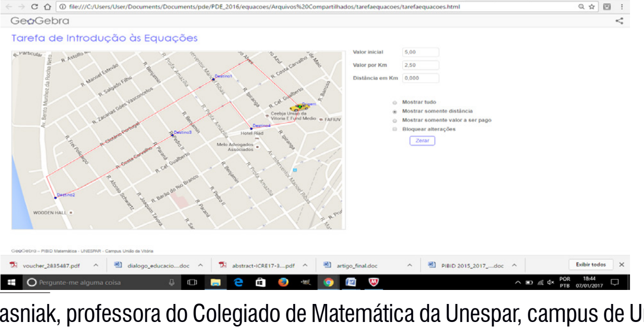
# EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL[9]

Esperamos que o material contribua com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, principalmente ao que se refere à compreensão dos elementos de uma equação e a sua resolução. Buscamos atender as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, que sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorra:

> por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> - reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
> - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> - utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Nesse sentido buscamos introduzir a noção de variável, incógnita e equação por meio da exploração de um objeto de aprendizagem criado no GeoGebra e que permite simular corridas de táxi a 4 destinos diferentes, percorrendo trajetos pre-definidos em um mapa de parte da cidade de União da Vitória, Paraná, em que o subprojeto do Pibid de Matemática se desenvolve.

O arquivo pode ser acessado na página do PIBID de Matemática da Unespar, *campus* de União da Vitória, disponível em <http://pibidmatfafiuv.webnode.com/tarefas-com-o-geogebra/>. É necessário baixar e descompactar o arquivo para que este funcione corretamente, pois não funciona se for aberto diretamente do arquivo compactado. Após descompactar o arquivo, você deve acessar a pasta descompactada que foi criada e abrir o arquivo **tarefaequacoes.html** preferencialmente usando o Google Chrome ou Mozilla Firefox.




9 Maria Ivete Basniak, professora do Colegiado de Matemática da Unespar, campus de União da Vitória.

Tomando ainda como referência os PCN que sugerem que "noções de álgebra sejam introduzidas já durante o trabalho com números a fim de que os alunos estabeleçam relações funcionais por meio da exploração de padrões, permitindo que os alunos construam generalizações" (BRASIL, 1998, p. 68), o arquivo permite mostrar todos os valores, ou selecionar apenas "mostrar distância" ou "mostrar valor a ser pago", permitindo assim que o professor crie situações que melhor atendam aos seus objetivos e aos interesses dos alunos.

Os PCN discutem ainda a "complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos" esclarecendo que no sétimo ano, ou terceiro ciclo, é suficiente que "os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas" (BRASIL, 1998, p. 68), que é o que objetivamos com as duas tarefas que propomos.

## Encaminhamentos do material

O material é composto por duas tarefas que utilizam dois arquivos do GeoGebra.

A primeira tarefa – introdução às equações – utiliza o arquivo do GeoGebra **tarefaequacoes.html** e precisará da ajuda do professor para ser acessado pelos alunos e funcionar corretamente. Embora sua extensão seja html, foi construído no GeoGebra e funciona sem acesso à internet. Precisa somente de um navegador, preferencialmente Chrome ou Mozilla Firefox, para funcionar corretamente. Objetivamos que, por meio da realização da tarefa e manipulação do objeto de aprendizagem, os alunos compreendam o que são variáveis e incógnitas e por que são usadas na matemática, representando valores que variam em função de outros ou simplesmente um valor desconhecido. Nesta primeira tarefa os alunos não precisam calcular esses valores desconhecidos, pois podem visualizar todos no objeto de aprendizagem construído, a fim de que observem que quando as letras estão representando valores desconhecidos, esses podem ser calculados.

Já a segunda tarefa objetiva, por meio do objeto de aprendizagem denominado **area.ggb,** que os alunos resolvam equações, calculando o perímetro de um retângulo em que dois de seus lados variam. A tarefa utiliza também o primeiro arquivo, **tarefaequacoes.ggb**, mas agora a fim de que os alunos calculem os valores desconhecidos. Os valores encontrados podem depois ser verificados no arquivo, entretanto, lembramos que devido às aproximações, podem ocorrer diferenças entre os valores encontrados para um mesmo trecho por diferentes alunos, cabendo ao professor discutir com os alunos sobre valores discretos e contínuos e como esses últimos podem apresentar variações, dependendo do ponto selecionado em uma reta.

## Critérios de Avaliação

A avaliação é essencial à prática educativa e indissociável desta. Permite ao professor acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica e ao aluno que saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.

Objetivamos que com as tarefas propostas os alunos utilizem linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas e, assim, empreguem representações algébricas para expressar generalizações sobre regularidades observadas em algumas sequências numéricas, assim como construam procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. O professor pode verificar se esses objetivos foram alcançados durante o desenvolvimento das tarefas propostas, ou ainda criar outras situações similares.

**Referência**

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

## Tarefa 1 – Introdução às Equações[10]

***Objetivo:*** *Estabelecer o conceito de variável, incógnita e equação.*
*O arquivo pode ser acessado na página PIBID Matemática Unespar Campus União da Vitória* ***http://pibidmatfafiuv.webnode.com/tarefas-com-o-geogebra/***
*É necessário baixar e descompactar o arquivo para que este funcione corretamente (o arquivo não funciona se for aberto diretamente da pasta compactada). Após descompactar o arquivo, acesse a pasta descompactada que foi criada e abra o arquivo* ***tarefaequacoes.html****. O arquivo funciona corretamente nos navegadores Google Chrome e Mozilla Firefox.*

No arquivo **tarefaequacoes.html**, observe o percurso que pode ser percorrido por um taxista saindo da Praça Coronel Amazonas e selecione a opção **Mostrar tudo**. Em cada corrida é cobrado um valor inicial fixo de R$ 5,00 e um valor por quilômetro percorrido de R$ 2,50 (estes valores podem ser alterados no arquivo). Para movimentar o táxi, clique com o mouse sobre o ponto verde no táxi e use as setas no teclado. *O arquivo possibilita que o táxi ande em qualquer direção no percurso definido, mesmo com o mapa no arquivo apresentando setas para indicar a mão correta em determinadas ruas. Com isso é possível falar sobre a importância de se respeitar as leis de trânsito.*

1. Um passageiro deseja ir do ponto inicial até o destino 1. Movimente o táxi até o destino 1 e responda as perguntas:

10 Lucas Ramon de Lima, Suelen Geronço, Maria Ivete Basniak, Celso Marczal

a) Quais valores foram alterados?
*Foram alterados os valores dos quilômetros percorridos e do valor a ser pago.*

b) Qual é o valor a ser pago?
*Um valor próximo a R$ 6,53, visto que os alunos deslocarão o táxi para pontos próximos ao destino, mas que não sejam exatamente o mesmo, ocasionando uma variação na distância e consequentemente no valor a ser pago. Os diferentes valores apresentados são uma oportunidade de introduzir o conceito de variáveis, mostrando que, para cada distância percorrida, um novo valor a ser pago é gerado. Na próxima questão deve-se discutir a representação algébrica de uma variável.*

c) Escreva as operações utilizadas para calcular esse valor. Represente essas operações substituindo os valores que são alterados por letras.
$5+2,50.0,61=6,53$
$5+2,50.d=v$

*Os valores e as letras utilizadas pelos alunos podem ser outros.*
*Nesse momento espera-se que os alunos compreendam as operações necessárias para encontrar o valor a ser pago e também a ideia de utilizar letras para representar valores que variam.*

2. Se o passageiro quiser ir do ponto inicial até o destino 2 (para voltar o táxi para a origem e limpar os valores no arquivo, basta clicar no botão **Zerar** e, em seguida, **Mostrar tudo**). Lembre-se que, para mover o táxi, é necessário clicar no ponto verde sobre o táxi e utilizar a setas do teclado.

a) Quais valores foram alterados?
*Foram alterados os valores dos quilômetros percorridos e do valor a ser pago.*

b) Qual é o valor a ser pago?
*Um valor próximo a R$ 9,22 (seguindo as mãos corretas nas ruas).*

c) Escreva as operações utilizadas para calcular esse valor. Represente essas operações substituindo os valores que são alterados por letras.
$5+2,50.1,69=9,22$
$5+2,50.d=v$

3. Selecione a opção **Zerar**. Outro passageiro deseja ir do ponto inicial até o desti-

no 3 (Lembre-se de clicar no ponto verde sobre o táxi para movimentá-lo e utilize as setas no teclado).

a) Qual é a distância percorrida?
*Um valor próximo a 2,34 km (seguindo as mãos corretas nas ruas).*

b) Qual é o valor a ser pago pela corrida?
*Um valor próximo a R$ 10,85, de acordo com a resposta ao item a. Nesse momento, espera-se que o aluno compreenda que é possível calcular o valor a ser pago mesmo que o arquivo não o apresente. Caso o aluno não consiga, ele pode fazer uso da expressão estabelecida anteriormente.*

4. Um passageiro quer sair do ponto inicial, ir até o destino 3 e, após, voltar para o destino 2. Observe que há setas no mapa que indicam a direção na rua que o carro pode ir.

a) Qual será a distância percorrida?
*Um valor próximo a 4,77 km (seguindo as orientações corretas nas ruas).*

b) O valor a ser pago será o mesmo na questão 3 item b? Por quê?
*Nesta questão os alunos devem observar que o valor não é o mesmo, pois não foi percorrida a mesma distância. O cálculo que deve ser efetuado é a distância da origem até o destino 3 somado com a distância de todo o trajeto e o destino 2, para seguir as orientações corretas das ruas.*

5. Observando as questões anteriores, qual é a relação entre a distância e o valor a ser pago?
*A relação é que para cada distância percorrida terá um valor a ser pago. Pode-se aproveitar a ocasião para apresentar o conceito de variável independente e dependente. A distância a ser percorrida é a variável independente, varia de acordo com a necessidade do passageiro de chegar a um determinado destino. O valor a ser pago passa a ser a variável dependente, que varia de acordo com a distância percorrida. Nas questões finais serão apresentadas as equações e as incógnitas.*

6. Escreva a expressão que representa a relação entre uma distância percorrida qualquer e o valor a ser pago?
*5+2,50. distância percorrida=valor a ser pago. Os alunos podem fazer uso somente de letras, pois utilizaram em expressões anteriores.*

7. Selecione a opção **Zerar** e, após, selecione a opção **Mostrar somente valor a ser pago**. Outro passageiro deseja ir do ponto inicial até o destino 4.

a) Qual é o valor a ser pago pela corrida?
*Um valor próximo a R$ 12,18.*

b) É possível calcular qual foi a distância percorrida? Como?
*O aluno pode responder que a distância não está expressa no arquivo, mas que pode ser calculada e para isso poderá utilizar a expressão (equação) $5+2{,}50.d=v$.*

c) Escreva a expressão que representa a relação entre esta distância e o valor a ser pago.
*$5+2{,}50.d=12{,}18$. Os alunos podem apresentar a expressão de outras formas. Neste momento é possível introduzir o conceito de equação e incógnita. Quando temos uma das variáveis em uma expressão e precisamos calcular o valor da outra, a variável que precisa ser calculada passa a ser chamada de incógnita. A expressão que estabelece a igualdade entre duas outras expressões ou entre uma expressão e um valor específico (caso apresentado no problema) é chamada de equação.*

## Tarefa 2 – Resolução de Equações[11]

***Objetivo:*** *Resolver equações.*

Abra o arquivo **area.ggb.** Neste arquivo há um retângulo cuja altura é 2 e o comprimento, de medida **x,** varia conforme movimentamos o controle deslizante **incógnita**.

1. Movimente o controle deslizante **incógnita**. O que acontece com o retângulo?
*O comprimento do retângulo, o perímetro e a área aumentam ou diminuem.*

2. Qual a relação entre as medidas dos lados do retângulo?
*As medidas dos lados opostos são iguais.*

3. Escreva a equação que representa a área do retângulo.
*$A=2.x$*

4. Se a área do retângulo é 12 unidades de medida, qual é o valor de x? Explique como você calculou.
*O valor de x é 6 e o aluno pode responder que se multiplicar 2 por 6 o resultado será*

11 Maria Ivete Basniak, Simone Ribeiro, Celso Marczal

*12. Nesse caso o professor pode questionar o aluno sobre como poderia resolver um problema similar se a área não fosse um número inteiro, por exemplo, 12,5? O que deve levar o aluno a estabelecer outra estratégia, que pode ser dividir 12,5 por 2, ou seja, utilizar a operação inversa.*

5. Escreva a equação que representa o perímetro do retângulo.
*P=4+2x.*

6. Se o perímetro é 6 unidades de medida, qual o valor de x? Explique como você calculou.
*1.*

7. Abra o arquivo **tarefaequacoes.html[12],** selecione a opção **mostrar somente valor a ser pago** e altere os valores das caixas **taxa inicial** para R$ 5,00 e **taxa por km** para R$ 3,00. Para movimentar o táxi, clique com o mouse sobre o ponto verde no táxi e use as setas no teclado. Escreva a equação que permite calcular a distância percorrida e resolva-a para saber a distância da **origem** até o **destino**:

a) Destino1: aproximadamente *500 metros.*

b) Destino2: aproximadamente *1,580 km.*

c) Destino3: aproximadamente *2,240 km.*

d) Destino4: aproximadamente *2,670 km.*

*A distância pode variar de acordo com o manuseio específico de cada aluno com as setas, portanto os resultados podem não ser os mesmos, porém próximos. A equação pode ser escrita de diferentes formas, o que deve ser discutido com a turma, visto que não interferirá no resultado se for corretamente resolvida.*

8. Selecione a opção **mostrar somente valor a ser pago** e altere os valores das caixas **taxa inicial** e **taxa por km** para os valores do quadro a seguir. Escreva a equação que permite calcular a distância percorrida e resolva-a para saber a distância da **origem**

12 O arquivo pode ser acessado na página PIBID Matemática Unespar *campus* União da Vitória **http://pibidmatfafiuv.webnode.com/tarefas-com-o-geogebra/** É necessário baixar e descompactar o arquivo para que este funcione corretamente (o arquivo não funciona se for aberto diretamente do arquivo compactado). Após descompactar o arquivo, acessar a pasta descompactada que foi criada e abra o arquivo tarefaequacoes.html. O arquivo funciona corretamente nos navegadores Google Chrome e Mozilla Firefox.

até o **destino**. **Lembre-se** que cada vez que o valor das caixas for alterado, você deve clicar na opção **zerar** antes de alterar os valores novamente.

*Para que o arquivo apresente valores apropriados, o programa arredonda os resultados dos cálculos de forma a exibi-los com o número correto de casas decimais (3 casas decimais para a **Distância em Km** e 2 casas decimais para o **valor a ser pago**). O arredondamento é feito de forma que, se o valor da casa decimal imediatamente após a última casa que será apresentada estiver entre 0 e 4, o valor da última casa decimal apresentada é mantido. Se o valor da casa decimal imediatamente após ela estiver entre 5 e 9, o valor da última casa decimal é acrescido em 1. Para evitar que esses arredondamentos prejudiquem os cálculos dos alunos, é interessante utilizar para o campo **Valor por Km** um número múltiplo de 0,05.*

| Taxa inicial | Taxa por Km | Destino | Valor a ser pago | Distância |
|---|---|---|---|---|
| R$ 10,00 | R$ 0,05 | 1 | | |
| R$ 8,00 | R$ 0,10 | 2 | | |
| R$ 6,00 | R$ 0,25 | 3 | | |
| R$ 7,00 | R$ 0,20 | 4 | | |

9. As distâncias encontradas nos itens a, b, c e d do item 7 foram as mesmas respectivamente para o destino 1, 2 , 3 e 4 do item 8?

*Nesta questão os alunos dificilmente responderão que as distâncias são as mesmas, pois ao mover o carro não deslocarão exatamente para o mesmo ponto, sendo interessante discutir isso com os alunos uma vez que em situações reais o mesmo pode ocorrer, visto que não há um ponto específico em que o táxi para, o que ocasiona diferenças no valor a ser pago.*

# Capítulo 4

# MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA[13]

Neste texto apresentamos os pressupostos que levamos em consideração ao propor um conjunto de sete tarefas, utilizando objetos de aprendizagem desenvolvidos no *software GeoGebra*, que conduzem os alunos dos anos finais do ensino fundamental aos conceitos relacionados à Matemática Financeira. Apresentamos, inicialmente, uma reflexão sobre o ensino da Matemática Financeira como modelador do cidadão crítico, consciente e responsável sobre sua vida financeira. Em seguida, fazemos uma introdução dos objetivos principais de cada uma das tarefas, que podem ser aprofundadas e melhoradas pelos professores conforme suas necessidades e especificidades. Finalmente, fazemos algumas considerações sobre como se pode proceder em relação à avaliação das aprendizagens relacionadas às tarefas apresentadas.

**Sobre a Matemática Financeira**

A Matemática Financeira é um ramo da Matemática que aplica seus conceitos no estudo da variação do dinheiro com o passar do tempo. Para Puccini (2004, p. 3), "a Matemática Financeira está diretamente ligada ao valor do dinheiro no tempo, que, por sua vez, está interligado à existência da taxa de juros".

Segundo Santos (2011, p. 19), "[...] os conteúdos, estratégias e discussões da Matemática Financeira, muito mais que a descrição de algoritmos, fórmulas e cálculos descontextualizados, são fundamentais para um ensino de Matemática que estimule a investigação e o espírito crítico do aluno/cidadão".

A Matemática Financeira é contemplada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) dentro do conjunto de Números e Operações e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (DCEs) dentro do conteúdo estruturante Tratamento da Informação.

Nas DCEs (PARANÁ, 2008), os conceitos da matemática financeira estão distribuídos em todos os anos finais do ensino fundamental, sendo que ao termino deste ciclo, ou seja, do 9º ano, os alunos devem demonstrar conhecimentos sobre porcentagem, taxa juros, juros e montante aplicados ao regime de capitalização simples e composto.

> Ao final do Ensino Fundamental, é importante o aluno conhecer fundamentos básicos de Matemática que permitam ler e interpretar tabelas e gráficos, conhecer dados esta-

13 Dirceu Scaldelai, professor do Colegiado de Matemática da Unespar, *campus* de União da Vitória.

> tísticos, conhecer a ocorrência de eventos em um universo de possibilidades, cálculos de porcentagem e juros simples (PARANÁ, 2008, 61).

Nos PCNs (BRASIL, 1998), espera-se que os alunos do 3º ciclo devam resolver problemas que envolvam a ideia de proporcionalidade incluindo os cálculos de porcentagens e que no 4º ciclo devam ser capaz resolver situações problemas que envolvam juros simples e alguns casos de juros compostos.

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc., é necessário trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos (BRASIL, 1998, p. 86).

Quando se fala em matemática aplicada ao cotidiano, a matemática financeira, sem dúvida, está intimamente ligada ao dia a dia das pessoas, sejam elas de qualquer faixa etária. É impossível uma pessoa não se envolver em problemas corriqueiros do dia a dia que envolva conceitos financeiros.

> Através da aprendizagem da Matemática Financeira os alunos podem vivenciar situações de seu cotidiano como: compra, venda, pagamento à vista, pagamento parcelado, juros, desconto e outras situações diárias que podem exigir este conhecimento. Supõe-se que este fato pode despertar um maior interesse pelo assunto, que será de uso contínuo em sua vida (GALLAS, 2013, p.12).

A Matemática Financeira está diretamente ligada a questões de cidadania, visto que proporciona a formação de cidadãos críticos, que tomam decisões reflexivas sobre seus capitais. No entanto, o ensino desta ainda é muito fragilizado na educação básica, porque muitas vezes os conteúdos, que fazem parte da Matemática Financeira, são ensinados de forma desconexa com a realidade, tornando-se uma mera repetição de fórmulas prontas e decoradas que não fazem sentido algum para os alunos, isso quando estes conteúdos chegam a ser trabalhados.

**Encaminhamentos do material**

A partir das possibilidades que o *software GeoGebra* apresenta para explorar conteúdos matemáticos de forma dinâmica, o material, composto por objetos de aprendizagem e tarefas, foi construído para que o aluno consiga desenvolver as atividades com certa autonomia. As tarefas pressupõem a realização de investigações, a partir da elaboração e teste de conjecturas no processo de elaboração de seu próprio saber. O aluno, portanto, constitui o elemento principal do processo de aprendizagem, deixando o professor como um mediador. Entretanto, isso não exclui o professor do processo de aprendizagem, sendo sua interferência essencial em alguns momentos para que o aluno obtenha êxito ao escolher seus caminhos. Dessa forma, o professor deve auxiliar o aluno na construção de seu conhecimento, norteando a realização das tarefas, questionando-o sobre as suas hipóteses e conclusões, indagando novos cenários ou caminhos a se seguir, estimulando os alunos a buscarem respostas ou argumentos para solucionar uma problemática que o material venha a possibilitar.

A utilização do *software GeoGebra* como plataforma para desenvolver os objetos de aprendizagem vem seguir uma corrente do meio acadêmico em utilizar-se deste por se tratar de *software* livre de Matemática Dinâmica que combina álgebra e geometria em uma única interface.

> O **GeoGebra** (aglutinação das palavras **Geo**metria e Ál**gebra**) é um software de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (do inglês, **Graphical User Interface**, ou do português **Interface Gráfica do Utilizador**) (SCALDELAI, 2014, p.13, grifo do autor).

Sobre a compreensão de objeto de aprendizagem, corroboramos com Wiley (2000, p. 7), que trata objeto de aprendizagem como "qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino".

O material do aluno é composto, portanto, por sete tarefas, sendo que as três primeiras trazem conceitos de razão e proporção para embasar o princípio de porcentagem.  A tarefa 4 busca fomentar a compreensão de porcentagem como sendo uma razão. As três tarefas restantes trabalham diretamente com conceitos próprios da Matemática Financeira, isto é, com o princípio de acréscimo e/ou desconto diretos ou sucessivos, capitalização simples e composta.

Como o exporto, foram desenvolvidas tarefas que objetivam levar o aluno a construir de forma gradativa conceitos da Matemática Financeira. Na *Tarefa 1*, objetiva-se que o aluno compreenda o conceito de razão por meio da relação entre as dimensões de duas figuras dispostas no objeto de aprendizagem *"Redução ou Ampliação.ggb"*. As tarefas 2 e 3 objetivam levar os alunos à compreensão de proporcionalidade, sendo que na tarefa 2, o objeto de aprendizagem *"AlturaXEnvergadura.ggb"* conduz os alunos a perceber a existência de uma proporção no corpo humano, relacionando a altura com a envergadura; e a tarefa 3 vem complementar a sua antecessora no intuito de relacionar grandezas proporcionais e grandezas não proporcionais por meio do objeto *"Assistindo_Tv.ggb"*.

A tarefa 4, cujo objeto de aprendizagem, nominado *"Enchendo_o_tanque.ggb"*, objetiva levar o aluno a pensar na porcentagem como uma razão de **a** para **b**, tendo

**b**=100, e por consequência na proporção entre razões quando **b** é diferente de 100. Está tarefa ainda busca levar o aluno a pensar na razão como uma fração e nas diferentes formas de representação da razão, entre uma parte e o todo.

A tarefa 5 é a primeira do conjunto de tarefas que trabalha diretamente com a matéria-prima principal da Matemática Financeira, isto é, o dinheiro (capital). O objeto "*Acréscimos_e_Descontos.ggb*" possibilita ao aluno verificar as consequências de se acrescentar ou descontar uma dada porcentagem sobre um capital. As variações de acréscimos e descontos podem ser simples, sucessivas ou alternadas, levando os alunos a refletirem sobre lucro e prejuízo.

A tarefa 6 utiliza-se do objeto *"Boleto_de_pagamento.ggb"* que faz referência ao conteúdo de juros simples. Ela conduz o aluno a compreender como funciona a cobrança de um boleto de pagamento que cobra multa sobre o regime de capitalização simples. O objeto também possibilita que o aluno faça a relação da capitalização simples com a função polinomial de primeiro grau.

A tarefa 7, por sua vez, a partir do objeto de aprendizagem *"Enchendo _o_bolso. ggb"*, busca levar o aluno a compreender o regime de capitalização composta como a capitalização simples sobre o montante atualizado. O objeto permite também a aplicação de capital ou a retirada de capital do processo de capitalização.

**Avaliação**

No processo educativo, a avaliação é necessária e inseparável deste, tanto como meio de diagnóstico do processo ensino-aprendizagem quanto como instrumento de investigação da prática pedagógica. Nessa perspectiva, a avaliação assume um papel de reagente da reflexão, que jamais pode ser considerada o fim do processo de ensino e aprendizagem, mas o catalizador do processo.

> Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao aluno, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p.30).

Colaborando com o pensamento das autoras, os conteúdos apresentados nas tarefas são partes integradoras da chamada Matemática informativa, isto é, são conteúdos da matemática que são essenciais para a compreensão do mundo em que vivemos, o que torna seu processo de avaliação ainda mais rico e complexo, devido à familiaridade que as pessoas (alunos) tem com estes no seu dia a dia.

Cabe ao professor em sua avaliação, julgar esses saberes e incorporá-los ao processo de ensino e aprendizagem tornando a rotina da avaliação algo contínuo na tomada de suas decisões metodológicas.

## Referências


BRASILI. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática**. Brasília : MEC /SEF, 1998.

GALLAS, R. G. **A Importância Da Matemática Financeira No Ensino Médio E Sua Contribuição Para A Construção Da Educação Financeira No Cidadão.** 2013, 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Paraná, 2008.

PAVANELLO, R. M.; & NOGUEIRA, C. M. I., Avaliação em Matemática: algumas considerações. Revista: **Estudos em Avaliação Educacional**, volume. 17, n. 33 , jan.\abri 2006. ISSN: 0103-6831 e-ISSN: 1984-932X

PONTE, J. P. **Tarefas** no Ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa, Edição Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014., ISBN978-989-8753-06-99, Cap. 1, p.13-27.

PUCCINI, A. de. L. **Matemática Financeira:** objetiva e aplicada. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. 410 p.

SANTOS, R. P. D. **Uma Proposta de Formação Continuada Sobre Matemática Financeira Para Professores De Matemática do Ensino Médio**. 2011, 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

SCALDELAI, D. O software GeoGebra. In: BASNIAK, M. I.; & ESTEVAM, E. J. G.(Org). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba:, Eeditorta Atual, 2014., Cap. 1, p.13-23.

WILEY, D. Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor and a taxonomy. In: WILEY, D.______. **The instructional use of learning objects, 2000** [online]. Disponível em: http://reusability.org/read/ . Acesso em 22 Maio de 2016.


# Tarefa 1 - Redução ou Ampliação[14]

***Objetivo:*** *Compreender o conceito de razão por meio da relação entre as medidas das figuras que se alteram com a movimentação dos controles deslizantes.*

14 Patrícia Andressa Maieski, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Ariel Marczaki, Clara Caroline Uniat, Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida.

Joana deseja ampliar a imagem a seguir, sem distorcê-la.


Para isso, Joana precisa aumentar as medidas da foto, mantendo o mesmo desenho. Pensando nisso, Joana chegou à seguinte foto ampliada:


Como podemos observar, o desenho aumentou, de forma que suas medidas de comprimento e largura seguiram a mesma razão. Veremos de que maneira podemos relacionar as dimensões dessas figuras.

O arquivo **Redução_ou_ampliação.ggb** do GeoGebra servirá de base para suas análises. Abra o arquivo no GeoGebra, selecione uma das opções, meninos ou meninas, e responda as questões a seguir.

1. Movimente os controles deslizantes $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$. O que acontece com as figuras?
*As medidas das figuras aumentam ou diminuem ao movimentar os controles deslizantes. Os alunos devem perceber que as figuras aumentam ou diminuem de tamanho, ou seja, são ampliadas ou reduzidas. Esta questão tem por objetivo que os alunos tenham uma familiarização com os controles deslizantes e o que estes fazem em relação às figuras, dando início a percepção visual acerca das modificações das medidas das figuras.*

2. Quais as medidas das figuras quando os controles deslizantes $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ são iguais a 1?
*As medidas são 3 de largura e 4 de comprimento em todas as figuras. Nesta questão, os alunos devem observar que, quando os controles deslizantes estão no valor 1, todas as figuras possuem as mesmas medidas.*

3. Deixe o controle deslizante **$f_1$** no valor 1, e o controle deslizante **$f_2$** no valor 2. Quais as medidas obtidas para a **Figura 2**? O que as novas medidas obtidas para a **Figura 2** representam em relação à **Figura 1**?
*Quando o controle deslizante **$f_1$** está no valor 1 e o controle deslizante **$f_2$** no valor 2, as medidas obtidas para a **Figura 2*** são 6 unidades de largura e 8 unidades de comprimento*. Essas novas medidas representam que a **Figura 2** têm o dobro das medidas da figura 1. O aluno também pode dizer que as medidas da **Figura 1** têm metade das medidas da **Figura 2**. Desse modo, o professor pode direcionar a tarefa para o conceito de razão. O professor pode observar se os alunos estão "contando" o valor correto para as medidas da figura, como, por exemplo, a largura da **Figura 2**, verificando se os alunos estão usando 6 unidades, a partir da contagem do 4 ao 10, ou se estão utilizando 10 que é até onde a figura está posicionada. A medida também pode ser obtida a partir da subtração entre 10 e 4.*

4. Deixe o controle deslizante **$f_2$** no valor 3 e, em seguida, mova o controle deslizante **$f_3$**. Há um padrão na forma como as figuras mudam de tamanho. Você consegue explicá-lo?
*À medida que o controle deslizante **$f_3$** assume valores maiores do que 3, a **Figura 3** aumenta as medidas em relação à **Figura 2**. Por exemplo, quando o controle deslizante **$f_3$** é 4 e o controle deslizante **$f_2$** é 3, as medidas da **Figura 2** é ¾ da medidas da **Figura 3**, e assim por diante. Caso o valor do controle deslizante **$f_3$** seja menor do que 3, a **Figura 3** possuirá medidas menores em relação às medidas da **Figura 2**. O aluno pode apenas responder que as medidas das figuras aumentam ou diminuem, então cabe ao professor questionar sobre o porquê isso acontece. As medidas aumentam ou diminuem de acordo com um padrão, ou seja, a largura aumenta (ou diminui) de 4 em 4 unidades e o comprimento de 3 em 3 unidades. Portanto, a razão entre as medidas das figuras para o exemplo anterior é de 3 para 4 .*

5. Deixe o controle deslizante **$f_2$** no valor 2, e o controle deslizante **$f_3$** no valor 4. Qual a razão da **Figura 2** para a **Figura 3**? E da **Figura 3** para a **Figura 2**?
*Da **Figura 2** para a **Figura 3**, a razão das medidas é $\frac{1}{2}$, e da **Figura 3** para a **Figura 2**, a razão é 2. Nessa questão, os alunos podem observar que com esses valores utilizados nos controles deslizantes, a **Figura 2** possui metade dos valores das medidas da **Figura 3**, ou seja, está na razão $\frac{1}{2}$. Se os alunos já tiverem notado que os valores atribuídos nos controles deslizantes estão relacionados com as medidas das figuras, podem simplesmente relatar que a razão da **Figura 2** para a **Figura 3** é $\frac{2}{4}$, que é igual a $\frac{1}{2}$. Assim, o professor pode dizer que para cada unidade de medida da **Figura 2** obtêm-se duas unidades de medida na **Fi-***

*gura 3*. *A mesma análise pode ser feita da* ***Figura 3*** *para a* ***Figura 2****, observando que a* ***Figura 3*** *tem o dobro das medidas da* ***Figura 2****, ou seja, dois está para um, podendo ser também representada na forma* $\frac{2}{1}$*. Neste momento, o professor pode induzir ao conceito de razão, que pode ser representado da forma* $\frac{a}{b}$*, em que a está para b. Após esta ideia de razão, os alunos podem retomar a tarefa e responder à questão 6.*

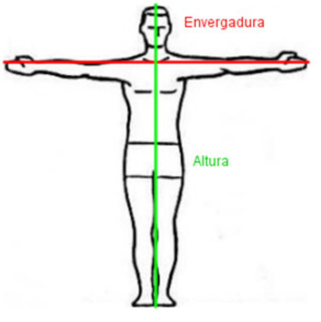
6. Explique de que forma podemos obter uma razão de uma figura para a outra?
*A razão das dimensões de uma figura para a outra pode ser obtida fazendo a divisão dos valores das medidas. Aqui, o professor pode explicar que de uma figura para outra podemos obter uma razão entre os valores, da forma* $\frac{a}{b}$*, em que a está para b. No caso da primeira foto de Joana, ela ampliou a largura de 3 unidades de medida para 6 unidades de medida, sendo que a razão foi de 2 para 1, ou seja, as medidas dos lados da figura dobrou de tamanho. Assim, finaliza-se a tarefa com a formalização do conceito de razão e utilizando as respostas dos alunos referentes a esta questão.*

## Tarefa 2 - Altura X Envergadura[15]

***Objetivo:*** *Compreender o conceito de proporção, observando que as razões da envergadura pela altura dos alunos são iguais, portanto, são proporcionais.*

A **envergadura** é o nome dado a uma determinada medida encontrada no corpo humano. Esta corresponde a maior distância entre as pontas dos dedos médios de cada mão, com os braços paralelos ao chão.

A **altura** do corpo humano é obtida medindo a distância dos pés à cabeça com a posição reta. Veja isso na imagem:




Com a orientação de seu professor, escreva o nome dos colegas do seu grupo na

15 Clara Caroline Uniat, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Ariel Marczaki, Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida, Patrícia Andressa Maieski.

planilha do arquivo **Altura x Envergadura.ggb** nas células **A2** até **A5**. Caso já exista um nome digitado, delete este nome com a tecla *Delete* e digite o nome que você desejar.

Agora, digite os valores das **altura**s e **envergadura**s em centímetros (que foram medidas em sala) nas colunas **B** e **C** da planilha.

Digite também na coluna **D** a razão da **envergadura** pela **altura** (caso o valor fique na cor vermelha, estará incorreto).

Com base nos valores digitados e na visualização da **envergadura** e **altura (**marque seu nome na caixa correspondente**)** propiciada pelo arquivo, responda as perguntas seguintes:

1. O que você percebeu quanto ao valor de sua **altura** e de sua **envergadura**?
*Os valores são iguais ou próximos. Espera-se que os alunos observem tal semelhança entre os valores obtidos através das medições. O professor deve ficar atento às eventuais situações que possam ocorrer como medidas muito dispersas, pois os alunos podem ter obtido medidas erradas, com os braços não paralelos ao chão.*

2. Qual a razão de sua **envergadura** pela **altura**? (digite o valor encontrado na coluna D da planilha).
*A razão é igual a um ou próximo a um. Cabe ao professor explicar que, como se trata de medições do corpo humano, existe um valor tolerável de 1,06 para homens e de 1,03 para mulheres.*

3. Compare o valor encontrado na questão 2 com o resultado dos seus colegas. O que você observou?
*O resultado das razões é igual ou com valores próximos.*

4. Analisando todas as razões encontradas no seu grupo, o que você identifica quanto a estas?
*Existe uma relação de proporção. Neste momento, o professor deve interferir e aproveitar para formalizar o conceito de proporção.*

5. Se uma pessoa desconhecida tem 1,80 m de **altura** e sua **envergadura** mede 1,30m (digite os valores na planilha), qual será a razão de sua **envergadura** pela **altura**? Essa razão da pessoa desconhecida é proporcional à sua?
*A razão será de 1,38 m. Não são proporcionais comparadas aos valores obtidos nas questões anteriores.*

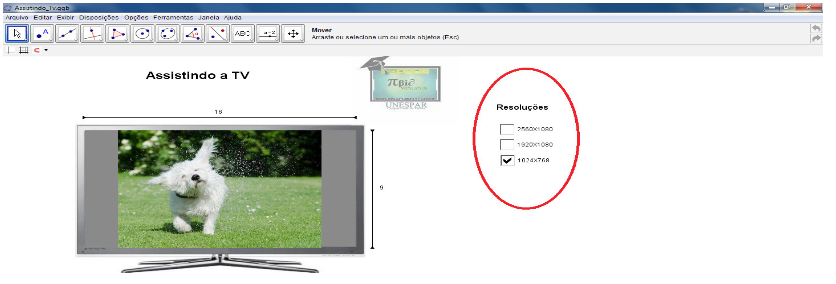
# Tarefa 3 - Assistindo TV[16]

***Objetivo:*** *Compreender o conceito de proporção por meio das resoluções apresentadas no arquivo e dos questionamentos apresentados nas questões e, após as simplificações necessárias, concluir que as razões são iguais entre a resolução e sua fração irredutível.*

A filha de Beto estava assistindo a um programa de TV. Quando pegou o controle para trocar de canal, acabou sem querer apertando um botão errado, o qual reconfigurou a imagem. Beto pegou o controle e começou a observar quais eram as opções de resolução da TV. Abra o arquivo do GeoGebra **Assistindo_TV.ggb**, mude as resoluções da TV de Beto e observe o que acontece. Em seguida, responda:

1. Se você fosse o Beto, em qual resolução deixaria a TV para continuar assistindo ao filme sem tarjas cinzas? Por quê?

*Os alunos devem mudar as seleções no GeoGebra:*




*A resolução na qual a imagem não vai apresentar tarjas cinzas é a 1920×1080. Esta questão induz o aluno a encontrar a resolução na qual ele não vai ter tarjas tanto superiores quanto inferiores, já induzindo o aluno para a próxima questão.*

2. Sabendo que as dimensões (largura por altura) da tela da TV de Beto segue uma razão de 16/9 (observe no arquivo), justifique porque a resolução 1920×1080 não apresenta tarjas cinzas nas bordas.

*O aluno poderá observar no arquivo do GeoGebra, seguindo os segmentos formados ao longo da largura e da altura da imagem da TV, e verificar que o 16 corresponde à largura e que o 9 corresponde à altura. Disto, afirmamos que 16/9 é uma razão entre a largura pela altura. Logo, ele pode dividir e chegar a um decimal, aproximadamente 1,777777778, na calculadora, e que*

16 Ariel Marczaki, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Clara Caroline Uniat, Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida, Patrícia Andressa Maieski.

*1920/1080 é a mesma coisa que 1920 x1080. O professor poderá intervir em grupos que questionem a diferença de notação (x e /) e que quando é feito 1920/1080, também é 1,777777778, afirmando assim que 1920 x 1080 é a resolução correta porque segue uma razão de 16/9. Outra forma que o aluno pode fazer é a simplificação, na qual ele encontrará que 16/9 e 1920/1080 são frações equivalentes, o que torna proporcional a razão do tamanho da tela e a resolução adequada da mesma. O professor tem o papel de provocar a comparação das razões, a qual futuramente será formalizada no conceito de proporção.*

3. Da questão anterior, por que uma das imagens apresenta tarjas cinzas superiores e a outra tarjas cinzas verticais?
*O aluno deve afirmar, a partir das contas e do raciocínio da questão 2, que 1024x768, a segunda opção de resolução, segue uma razão de 4/3, ou que 4/3 é equivalente a 1024/768, observando que a razão é de 16/9, e que essa resolução apresenta tarjas cinzas verticais porque na hora de dimensionar a imagem, o 4/3 vira 12/9, e não 16/9. Por isso, as tarjas cinzas verticais, pois o comprimento é a mesmo. Assim mesmo como 2560/1080, esta que aproximadamente segue uma razão de 16/6.75, que na tv apresentará bordas superiores, afinal a diferença seria de 16/6,75 para 16/9, cujas resoluções não são proporcionais. A largura é a mesma e o comprimento é diferente. Caso o aluno não consiga chegar neste raciocínio, o auxílio do professor deve proceder de maneira indutiva, não oferecendo a resposta, mas provocando o aluno para analisar caso a caso, e após isso fazer as comparações.*

## Tarefa 4 - Enchendo o Tanque[17]

***Objetivo:*** *Introduzir e compreender o conceito de porcentagem.*

Abra o arquivo **enchendo o tanque.ggb** e o utilize para preencher a coluna **porcentagem** dos quadros, selecionando o tanque referente à capacidade que está indicada nos quadros. Coloque os valores do volume de água contidos no quadro no arquivo e aperte a tecla enter. Em seguida, clique no botão encher para observar a representação. O arquivo deve ser usado para responder as questões ao longo da tarefa.

17 Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Ariel Marczaki, Clara Caroline Uniat, Patrícia Andressa Maieski.

Quadro 1

| Capacidade do Tanque | Volume de água | Porcentagem |
|---|---|---|
| 100 | 45 | *45%* |
| 100 | 60 | *60%* |
| 100 | 80 | *80%* |

Quadro 2

| Capacidade do Tanque | Volume de água | Porcentagem |
|---|---|---|
| 80 | 50 | *62,5%* |
| 160 | 130 | *81,25%* |
| 40 | 40 | *100%* |
| 80 | 80 | *100%* |

Quadro 3

| Capacidade do Tanque | Volume de água | Porcentagem |
|---|---|---|
| 150 | 160 | *106,25%* |
| 60 | 85 | *141,67%* |
| 80 | 100 | *125%* |

O que é possível observar em relação à porcentagem?

a) No quadro 1.
*A porcentagem é sempre relativa ao volume da água.*

b) No quadro 2.
*A capacidade do Tanque não precisa ser 100 para obter uma porcentagem. Quando a capacidade do tanque e o volume de água forem iguais à porcentagem, esta sempre será 100%.*

c) No quadro 3.
*Quando o volume da água é maior que a capacidade do tanque, a porcentagem é maior que 100%.*

2. A que correspondem os valores da capacidade do tanque e do volume de água? O que conseguimos obter entre esses valores?
*Espera-se nesta questão que os alunos observem que a capacidade do tanque corresponde ao total, e que o volume de água é uma parte que pode ser menor, maior ou igual ao total. Entre esses valores, é possível obter uma razão que pode ser expressa na forma de porcentagem.*

3. Observe a primeira linha do quadro 1. O que significa dizer que 45 litros correspondem a 45% de um tanque de capacidade de 100 litros?
*Nesta questão, os alunos deverão chegar ao conceito de que porcentagem é uma parte de algo; portanto, significa dizer que 45 litros correspondem a uma parte de um tanque de 100 litro de capacidade.*

4. O valor da razão de 3/4 do tanque é equivalente a qual porcentagem da sua capacidade?
*O valor ¾ do tanque é equivalente a 75% da capacidade total do tanque. O objetivo desta questão é mostrar que é possível usar uma razão para demonstrar uma porcentagem.*

5. O que acontece quando o volume de água é maior que a capacidade do tanque? Você pode utilizar os dados do Quadro 3.
*Quando o volume da água é maior que a capacidade do tanque, a água começa a transbordar. Espera-se que o aluno perceba que a porcentagem pode ser maior que 100%.*

6. O total (capacidade do tanque) deve ser sempre 100 para corresponder a 100%? Justifique. *O conceito de total é representado por 100%, mas esse total não precisa ser exatamente 100, pode ser outros valores que ainda assim serão 100%. Caso haja dificuldade do aluno em perceber a relação entre a capacidade do tanque, o volume e a porcentagem, o professor pode solicitar que ele observe os quadros 2 e 3.*

7. Observe a segunda linha do quadro 1. Se fizéssemos uma razão entre o volume de água (60 litros) e a capacidade do tanque (100 litros), chegaríamos ao resultado 0,6. É possível obter alguma relação entre este valor e sua porcentagem? Se sim, qual?
*Sim, pois 0,6 é o produto da razão 60/100, que é uma maneira de representar porcentagem. Se multiplicarmos o produto 0,6 por 100, que equivale a 100%, obteremos o resultado de 60%. Portanto, há uma relação entre esses valores.*

## Tarefa 5 - Acréscimos e Descontos[18]

***Objetivos:*** *Compreender o conceito de acréscimos ou descontos sobre um valor, acréscimos sucessivos e identificar o que acontece ao utilizar acréscimos seguidos de descontos sobre um determinado valor.*

18 Patrícia Andressa Maieski, Clara Caroline Uniat, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Ariel Marczaki, Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida.

Para resolver as questões, abra o arquivo ***Acréscimos e Descontos.ggb.*** Selecione a opção ***operações com acréscimos.***

1. Um comerciante adquire um produto para vender em sua loja com o custo (preço) de R$ 700,00 (deixe o controle deslizante ***Preço*** no valor 700). Com a venda do produto, este comerciante deseja obter um lucro de 25% sobre o valor do preço inicial. Qual deve ser o preço de venda do produto? (Movimente o controle deslizante ***Acréscimo1***).
*R$ 875,00.*

2. Depois de obtido o preço de venda com o ***Acréscimo1***, o comerciante decide aumentar o valor a uma taxa de 25% (Movimente o controle deslizante ***Acréscimo2***). Qual o valor de venda obtido com o novo aumento?
*R$ 1093,75.*

3. Observe o valor acrescido com o **Acréscimo1** e o **Acréscimo2**. Esses valores são iguais? Por quê? (Compare o valor de cada acréscimo no gráfico do arquivo, sendo que a cor com tonalidade média se refere ao **Acréscimo1** e a cor mais clara ao **Acréscimo2**).
Não*, porque o **Acréscimo1** foi feito sobre o valor de R$700,00 e o **Acréscimo2** foi feito sobre o valor de R$ 875,00. Nesta questão espera-se que os alunos observem que o **Acréscimo1** foi realizado sobre um determinado valor e o **Acréscimo2** foi feito sobre um valor que já tinha um acréscimo, ou seja, esse valor é diferente do primeiro, o que implica que o valor do **Acréscimo2** seja diferente.*

4. Com estes dois acréscimos, quanto o comerciante lucrou referente ao preço inicial do produto? Qual foi a porcentagem deste lucro?
*Obteve o lucro de R$ 393,75. A porcentagem foi de 56,25%. Nesta questão espera-se que os alunos percebam que a porcentagem do lucro não é 50%, não sendo a soma das porcentagens, pois se fosse 50% de R$700,00, o valor do lucro seria de R$350,00. O lucro é de R$ 393,75, pois, com o primeiro acréscimo, o valor aumentou de R$700,00 para R$ 875,00 e de R$ 875,00 para R$ 1093,75 com o segundo acréscimo. Nesta questão o professor pode explorar o conceito de acréscimos sucessivos.*

Para as questões a seguir, selecione a opção ***operações com desconto***.

5. Altere os controles deslizantes ***Preço*** e ***Acréscimo1*** deixando no valor de sua preferência (deixe o valor do ***Acréscimo2*** em 0) e anote no quadro a seguir:

| Preço | Acréscimo1 | Preço de Venda |
|---|---|---|
| | | |

Após isso, deixe o controle deslizante ***Desconto*** no mesmo valor escolhido para o ***Acréscimo1***. Anote os valores escolhidos no quadro a seguir e responda as questões:

| Preço | Acréscimo1 | Desconto | Novo Preço de Venda |
|---|---|---|---|
| | | | |

a) Analise os quadros anteriores, o valor do acréscimo foi o mesmo do desconto? Por quê? (Compare o **Preço de Venda** obtido a partir do ***Acréscimo1*** com o ***Novo Preço de Venda*** após o desconto).
*Não porque o acréscimo foi feito sobre o valor do **Preço** inicial escolhido, e o desconto foi feito sobre o **Novo Preço de Venda** após o **Acréscimo1**.*

b) Explique como foram obtidos os valores ***Preços de Venda*** e ***Novo Preço de Venda*** em cada quadro.
*No primeiro quadro, o **Preço de Venda** foi obtido multiplicando o valor do **Preço** por (1+(i/100)), sendo i a taxa de acréscimo. No segundo quadro, o **Novo Preço de Venda** foi obtido multiplicando o valor do **Preço** por (1+ (i/100)) para obter o valor com acréscimo e o resultado multiplica-se por (1-(i/100)) para obter o valor final, ou seja, o **Novo Preço de Venda** com desconto.*

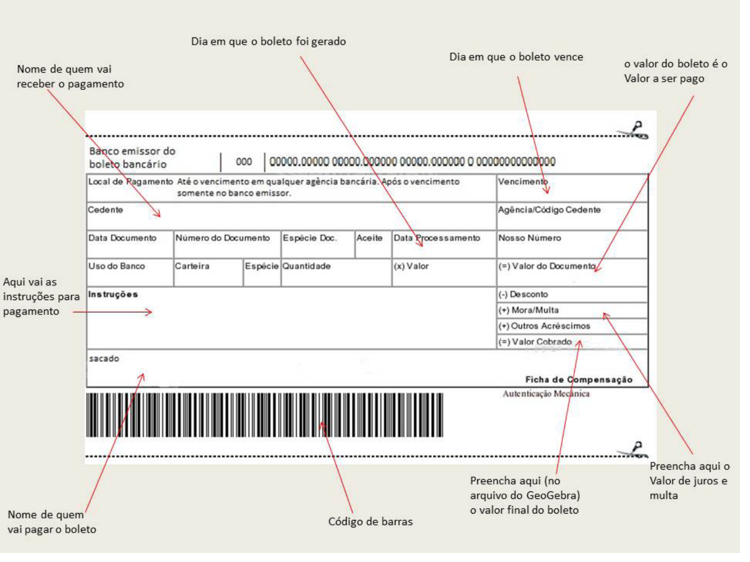
6. Suponha que o produto teve dois acréscimos sucessivos. E depois, para acabar com o estoque, o comerciante resolveu dar um desconto no valor da soma dos acréscimos. Seguindo este pensamento do comerciante, atribua valores para ***Acréscimo1, Acréscimo2*** e ***Desconto***, complete o quadro a seguir e responda a questão na sequência:

| Preço | Acréscimo1 | Acréscimo2 | Desconto | Novo Preço de Venda |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Fazendo isso, o comerciante consegue acabar com o estoque com <u>lucro</u>? Por quê? (Observe o valor do desconto que aparece no arquivo).
*Não, pois o valor do desconto será maior que o valor da soma dos acréscimos. Nesta questão, espera-se que os alunos observem que o valor do desconto em reais não é igual ao valor da soma dos acréscimos em reais. Assim, com o valor do desconto após os acréscimos, o comerciante não obterá novamente o preço de venda inicial.*

# Tarefa 6 - Boleto de Pagamento[19]

***Objetivo:*** *Compreender e calcular juros simples.*




Abra o arquivo do Geogebra **boleto_de_pagamento.ggb** para definir os valores do boleto, digitando o valor no campo de entrada **valor do documento R$**. Para os valores da multa, dos juros e dos dias de atraso, utilize os respectivos controles deslizantes. Antes de começar a tarefa, atualize a data.

1. Se o boleto tem valor de R$ 100,00 e o atraso do pagamento foi de 10 dias, qual será o valor cobrado?

| Valor do documento | % de juros | % de multa | Dias de atraso | Valor mora/multa | Valor total cobrado |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 5 | 5 | 10 | | |

Por fim, confira seus valores no arquivo do GeoGebra e observe se eles conferem com o gráfico. Quando o valor ficar azul, está correto.

*O valor da multa de 5% sobre R$ 100 é R$ 5,00, assim mesmo como 5% de juros de R$ 100,00 é R$ 5,00. Dado o valor para o juro de um dia, temos R$ 5,00 vezes 10 dias=R$ 50,00 e R$ 5,00 de multa, totalizando R$ 55,00 de mora/multa, en-*

19 Ariel Marczaki, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Clara Caroline Uniat, Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida, Patrícia Andressa Maieski.

*quanto o valor total cobrado vai ser o valor do documento mais o valor da mora/multa, respectivos R$ 100,00 e R$ 55,00= R$ 155,00. Espera-se que o aluno possa observar os valores da porcentagem e fazer essa conta mentalmente, por fim conferindo seus valores no arquivo do GeoGebra.*

2. Considerando um boleto que está em atraso há 7 dias, e o cedente cobra 8% de multa. Qual será o valor cobrado pelo boleto? Considere o valor do boleto R$ 80,00.
*O valor da multa é de 8%, logo, R$ 6,40. Disto, o valor total cobrado será de R$ 80,00 + R$ 6,40=R$ 86,40. O valor dos dias de multa não influencia no valor; afinal, a multa é um valor que não depende de dias de atraso, mas apenas do atraso do dia de pagamento predefinido, sendo considerado constante em relação ao número de dias, visto que nesta questão o valor de juros é de 0%. O professor pode encaminhar que o aluno, em caso de não compreender a explicação, observe o gráfico do Geogebra, o qual mostra explicitamente que apenas o valor da multa é cobrado nos dias, mas não é alterado, nem com dois dias de atraso, nem 30 dias de atraso.*

3. Considerando o boleto da questão anterior, quando você foi pagar em uma lotérica, o sistema estava fora do ar e você não pôde efetuar o pagamento. Sendo sábado de manhã (7º dia), você só poderá pagá-lo após o fim de semana. Por fim, o pagamento foi feito na terça-feira, 10 dias após o vencimento. Qual será o valor a ser pago?
*O valor a ser cobrado ainda será o mesmo, dado que o valor da multa não depende do número de dias de atraso.*

4. Existe diferença entre os valores obtidos na questão 2 e 3? Justifique.
*Existe apenas diferença nos dias de atraso, que aumentaram, mas o valor da multa continua o mesmo, não mudando o valor total a ser cobrado. Espera-se que o aluno possa observar que a multa é constante a partir do primeiro dia de atraso.*

5. Em outra compra, o valor cobrado pelo cedente é de R$ 20,00, a multa é de 0% e os juros de 9% ao dia. Calcule os valores para os seguintes períodos de atraso e complete os valores que faltam:

| Valor do documento | % de juros | % de multa | Dias de atraso | Valor mora/multa | Valor total cobrado |
|---|---|---|---|---|---|
| 20,00 | 9% | 0% | 1 | | |
| 20,00 | 9% | 0% | 2 | | |
| 20,00 | 9% | 0% | 4 | | |
| 20,00 | 9% | 0% | 6 | | |

*O aluno deve completar a tabela da seguinte forma:*

| Valor do documento | % de juros | % de multa | Dias de atraso | Valor mora/ multa | Valor total cobrado |
|---|---|---|---|---|---|
| 20,00 | 9% | 0% | 1 | 1,80 | 21,80 |
| 20,00 | 9% | 0% | 2 | 3,60 | 23,60 |
| 20,00 | 9% | 0% | 4 | 7,20 | 27,20 |
| 20,00 | 9% | 0% | 6 | 10,80 | 30,80 |

*No primeiro dia, o valor da mora/multa vai ser apenas em função dos juros, o que significa que é 9% de R$ 20,00, o que remete um valor cobrado de R$ 20,00 + R$ 1,80 = R$ 21,80. Para dois dias, temos o dobro de juros, a mesma coisa que 9%*2, 18% de R$ 20,00, que é R$ 3,60 de juros, tendo que o valor cobrado no segundo dia de atraso vai ser de 23,60. Para calcular quatro dias de atraso, temos 9%*4=36%, o que dá um valor de juros de R$7,20 e, somando ao valor total cobrado, temos R$ 27,20. Analogamente temos a mesma ideia para 6 dias de atraso. Caso o aluno não observe a diferença entre os valores, pode-se utilizar o gráfico como apoio para que o aluno observe os valores de dias de atraso.*

6. Observando os valores do quadro anterior, responda:

a) Qual é o valor da mora/multa com 1 dia de atraso?

*O valor da mora /multa com 1 dia de atraso é de R$1,80.*

b) Qual é a diferença entre os valores cobrados para o 1º dia e o 2º dia? Justifique.

*A diferença do valor de um dia de atraso para dois dias de atraso é o valor do juro, que em um dia era de R$ 1,80 e dois dias era R$ 3,60. Espera-se que o aluno compreenda que a cada dia de atraso é somado mais R$ 1,80 ao valor total cobrado e que esse valor pode ser descrito por uma função linear.*

c) Qual é a diferença entre os valores cobrados para o 2º dia e o 3º dia? Justifique.

*A diferença do valor de dois dias de atraso para três dias de atraso é o valor do juro, que em dois dias era de R$ 3,60 e três dias era R$ 5,40. Espera-se que o aluno compreenda que a cada dia de atraso é somado mais R$ 1,80 ao valor total cobrado.*

7. Selecione as três opções: **Mostrar Prestação**, **Mostrar Multa**, **Mostrar Juros** e **Mostrar Função**. O que você pode observar no gráfico?

*Espera-se que os alunos possam observar e compreender quais são os valores gerados pelos juros e que eles crescem de acordo com o número de dias de atraso, assim mesmo como os valores da multa, que são constantes* *durante todo o período de atraso. Os valores que estão sendo representados se todas as caixas selecionadas são as prestações, o valor do documento, os juros, a multa e a função linear que é delineada pelos pontos que representam os valores a serem pagos naquele dia.*

## Tarefa 7 - Enchendo o Bolso[20]

***Objetivo:*** *Compreender o conceito e realizar cálculos referentes a juros compostos.*

Abra o arquivo **Enchendo o Bolso.ggb** e no campo *Capital* (célula B2) atribua o valor 2000, que seria seu capital inicial. Em seguida, no campo *Taxa* (célula B3), atribua o valor 2, que seria sua taxa de juros mensal.

Juros compostos são os juros de um determinado período somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes, ou seja, é a prática de calcular juros sobre juros.

1. Observe que, no primeiro mês, o montante obtido foi de R$ 2.040,00. Neste período, quanto foi obtido de juros? Como é possível calcular este juro?
*Obteve-se um juro de R$ 40,00 no primeiro mês. É possível calcular o juro subtraindo o valor do montante do primeiro mês pelo valor do capital inicial. Espera-se que os alunos possam, utilizando o valor do montante e o valor do capital, subtrair R$ 2.040,00 (montante) do capital R$ 2.000,00 para encontrar o valor de R$40,00, juros correspondentes ao primeiro mês.*

2. No segundo mês, quanto se obteve de juros em relação ao primeiro mês?
*Obteve-se um juro de R$ 40,80 no segundo mês em relação ao primeiro mês. O aluno pode observar na tabela o montante do primeiro mês e o montante do segundo mês, encontrando dois valores distintos: R$ 2.040,00 e R$ 2.080,80 respectivamente; disto, o aluno pode subtrair o valor do segundo mês com o valor do primeiro mês para encontrar o valor dos juros, de modo que se o aluno subtrair o valor do segundo mês com o valor do capital estará errado.*

3. Por que houve diferença entre o juro do primeiro e o do segundo mês?
*Porque o juro do segundo mês foi calculado a partir do montante do mês anterior, e o do primeiro mês foi calculado a partir do capital da inicial.*

4. Coloque o valor 100 na célula C5, na coluna aplicação. O que é possível observar em relação ao montante final do primeiro mês?

20 Eduardo P. de Oliveira Rossa, Luiz Fernando Hamann Almeida, Dirceu Scaldelai, Norberto José Polsin, Ariel Marczaki, Clara Caroline Uniat, Patrícia Andressa Maieski.

*Foi aplicado o valor de R$ 100,00 ao montante do mês, resultando em R$ 2.140,00.*

5. Observe o gráfico e responda:
a) O que representam as barras laranja?
*As barras laranja representam o montante de cada mês.*

b) O que representam as barras verdes?
*As barras verdes representam o juro de cada mês.*

c) O que as barras azuis representam?
*As barras azuis representam a aplicação de cada mês.*

6. Qual era o valor do juro acumulado no segundo mês antes da aplicação e qual o valor depois da aplicação? Por que os valores mudaram?
*O valor de antes da aplicação era de R$ 80,80 e o depois da aplicação é de R$ 82,80. Os valores mudaram porque no primeiro momento, quando não houve aplicação, o montante final era R$2.040,00, e em um segundo momento, quando houve aplicação, o montante final era R$2140,00, logo, o juro do segundo mês foi calculado a partir de um valor maior.*

7. Qual é o valor do juro final em relação aos 24 meses sem nenhuma aplicação? Como você calculou?
*O valor do montante ao final de 24 meses é de R$ 3.216,87. Logo, o valor do juro será dado pela diferença desse montante e o capital inicial, ou seja, R$1.216,87.*

8. Observe o juro acumulado até o mês 12 e até o mês 24. Em relação ao mês 12 e o mês 24, observa-se que o período é o dobro. O juro acumulado neste período segue o mesmo padrão? Justifique.
*Espera-se que os alunos observem que a relação entre os juros do mês 12 e do mês 24 não é o dobro. Os juros acumulados até o mês 12 foram de R$ 536,48. O juro acumulado até o mês 24 foi de R$ 1.216,87.*

9. Substitua os valores na coluna aplicação dos doze primeiro meses, aplicando um valor de R$ 100,00 por mês, de maneira que os doze primeiros meses tenham R$ 100,00 de aplicação e os outros doze não tenham aplicação nenhuma. Calcule o juro que foi obtido.
*O montante final do primeiro momento, em que foram aplicados R$100 mês a mês nos doze primeiros meses, é de R$ 4917,85, cujo juro será a diferença*

*entre este montante e o capital inicial e ainda necessita-se subtrair o valor das aplicações. Logo:*

*4.917,85 – 2.000 = 2917,85*
*2.917,85 – 1.200 = 1717,85*

*Portanto, os juros obtidos foram de R$ 1.717,85 quando aplicado R$100 nos doze primeiros meses.*

10. Agora, substitua na coluna aplicação o valor apenas do primeiro mês, colocando R$ 1.200,00, de maneira que no primeiro mês sejam aplicados R$ 1.200,00 e que outros meses não possuam aplicação alguma. Calcule o juro que foi obtido.

*O montante final no segundo momento onde foram aplicados R$ 1.200 no primeiro mês é de R$ 5.109,15, onde o juro será dado pela diferença deste montante com o capital inicial e necessita-se subtrair o valor das aplicações. Temos:*

*5.109 – 2.000 = 3.109*
*3.109 – 1.200 = 1.909*

*Portanto, os juros obtidos foram de R$1.909,00 quando aplicado R$1.200,00 no primeiro mês.*

11. Por que houve diferença entre o juro obtido nos itens 9 e 10? Argumente.
*Quando aplicado R$ 100,00 mês a mês, os juros vão crescendo gradativamente. Quando aplicado R$ 1.200,00 no primeiro mês, os juros vão sendo calculados a partir de um montante maior. Como os montantes são diferentes, logo os juros serão diferentes.*

# Capítulo 5

# ÂNGULOS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA[21]

Este material foi desenvolvido com o objetivo de auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico, especialmente no que se refere aos ângulos e às razões trigonométricas, envolvendo assim números e medidas, indo ao encontro do que afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais: "o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc." (1998, p. 51).

As tarefas elaboradas utilizam arquivos do GeoGebra, um software de geometria dinâmica que permite aos alunos moverem os elementos geométricos e, dessa forma, a exploração é potencializada, bem como busca por regularidades e generalizações. Alguns dos principais benefícios e aplicações da geometria dinâmica, segundo King & Schattschneider (1997) citados por Santos e Martinez (2000) são:

> **precisão e visualização**: a construção da geometria é feita pelo estabelecimento de relações geométricas entre os elementos (perpendicularismo, paralelismo, pertinência, ângulo, etc.). Pode-se medir ângulos e distâncias e calcular-se relações com precisão, permitindo facilmente a verificação empírica de hipóteses e teoremas. Os conceitos de um teorema podem ser compreendidos por visualização. Adicionalmente, a precisão também é importante porque construções imprecisas podem conduzir o aluno a conclusões errôneas, já que é natural o julgamento humano ser fortemente influenciado pelas formas percebidas visualmente.
> **exploração e descoberta**: a manipulação de construções permite que se explore a Geometria e novas relações e propriedades sejam descobertas. Muitas vezes, os próprios alunos "re-descobrem" teoremas em sala de aula. O professor precisa estar preparado para responder a perguntas inesperadas. Da mesma forma que as planilhas eletrônicas permitem responder a perguntas do tipo "e se..." referentes a fórmulas e manipulações numéricas, a Geometria Dinâmica o faz para as relações gráficas.
> **provas de teoremas**: embora a geometria dinâmica não possa provar teoremas, a capacidade de experimentação de hipóteses que proporciona pode motivar a busca pela prova de um teorema, pois induz à convicção de sua validade. Da mesma forma, pode ajudar e sugerir caminhos para a prova formal. (p. 3)

Além de identificar as regularidades, é importante nesta etapa da escolaridade o

21 Celine Maria Paulek, professora do Colegiado de Matemática da Unespar, campus de União da Vitória.

aluno iniciar a busca por justificativas das regularidades encontradas, conforme orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais, "os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria"(1998, p. 86). Concordamos com a necessidade e importância do desenvolvimento do raciocínio dedutivo, por isso em algumas tarefas os alunos são convidados a identificarem regularidades ou generalizarem situações e então buscarem justificativas a partir do que exploraram e das tarefas anteriormente desenvolvidas.

**Encaminhamentos do material**

A tarefa 1 – *telhados* tem como objetivo identificar a representação de ângulo e levar o aluno a perceber a necessidade de medirmos ângulos para podermos fazer comparações. A tarefa possui questões que chamam a atenção para o fato de não podermos fazer comparações entre ângulos apenas visualmente, precisamos de medidas para comparar, e o professor pode envolver aqui a necessidade de ser unidade de medida padrão. A dinamicidade do *software* GeoGebra permite que o aluno "arraste o ângulo" até o lugar da imagem onde pretende medir e lá modifique a posição dos lados do ângulo e determine a medida deste.

Já a tarefa 2 – *opostos* explora ângulos opostos pelo vértice e a congruência de suas medidas. Aqui também a dinamicidade do software auxilia, mas neste caso é na formação de conjecturas, pois ao modificar as retas os alunos perceberão que a igualdade entre as medidas dos ângulos opostos pelo vértice se mantém. Esta tarefa, em sua última questão, vai ao encontro do que os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam em relação à justificativa das afirmações por parte dos alunos, e este mesmo princípio foi adotado nas tarefas 3 e 4.

A tarefa 3 envolve os ângulos formados quando um par de retas é cortado por uma transversal. Esta tarefa é dividida em 3A e 3B, sendo que a 3A tem como objetivo identificar ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos, colaterais internos e colaterais externos, e a 3B identificar e justifcar as igualdades ou desigualdades nas medidas desses ângulos quando o par de retas é paralelo ou não. No *software* é possível clicar no vértice do ângulo e arrastá-lo, colocando-o sobre um outro que tem igual medida ou não, fazendo essa verificação empiricamente (e criando as conjecturas), mas as questões também solicitam justificativa, o que faz com que apenas o empírico não seja suficiente, é necessário um raciocínio dedutivo também.

Ângulos e triângulos é a tarefa 4. Ela objetiva que os alunos identifiquem que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e permite que eles justifiquem o porquê deste resultado, utilizando as relações de igualdade obtidas na tarefa 3B, tendo duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Já a tarefa 5 – ângulos e polígonos, estende esta exploração para um polígono qualquer, de *n* lados, instigando os alunos a buscarem uma relação que os permita calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados. Esta tarefa baseia-se em polígonos e suas diagonais, de modo a transformar os polígonos em vários triângulos, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo já foi abordada na tarefa 4.

As tarefas 6 e 7 relacionam-se a triângulos retângulos e as razões trigonométricas. Na tarefa *triângulo retângulo*, o aluno tem a possibilidade de relembrar (ou aprender, caso não tenha estudado) os elementos de um triângulo retângulo, em especial qual é o cateto oposto e o adjacente em relação a um ângulo agudo deste triângulo. E na tarefa razões, é possível que eles alterem as medidas dos lados do triângulo, mas como a medida do ângulo se mantém, verifiquem que os valores das razões são constantes. A tarefa não possui uma questão específica que solicite aos alunos que justifiquem a igualdade das razões encontradas, mas há a possibilidade do professor solicitar ou até mesmo encaminhar esta justificativa juntamente com os alunos.

## Avaliação

A avaliação da aprendizagem é parte do processo educacional, e compreendemo-la em uma perspectiva formativa, na qual, segundo Rabelo (1998), a avaliação contribui para a aprendizagem, traz informações ao professor e ao aluno e permite o ajuste das estratégias utilizadas para o alcance dos objetivos propostos. “Ela pode reforçar positivamente qualquer competência que esteja de acordo com alguns objetivos previamente estabelecidos e permitir ao próprio aluno analisar situações, reconhecer e corrigir seus eventuais erros nas tarefas” (p.73-74).

As tarefas foram elaboradas visando ao desenvolvimento do pensamento geométrico, a criação de conjecturas e justificação destas, e consideramos que o professor poderá acompanhar o desenvolvimento dos alunos, coletar informações que permitam identificar se os objetivos foram alcançados e tomar decisões acerca das intervenções necessárias durante ou posteriormente ao desenvolvimento das tarefas.

## Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

RABELO, E. H. **Avaliação novos tempos novas práticas**. Petrópolis: Vozes, 1998.

SANTOS, E. T., & MARTINEZ, M. L. **Software para ensino de geometria e desenho técnico.** Ouro Preto: Graphica 2000, 9 p.

# Tarefa 1 – Telhados[22]

***Objetivo:*** *Identificar a representação de um ângulo e compreender a necessidade de medidas para comparar ângulos.*

Abra o arquivo **telhados.ggb** e responda as questões a seguir:

Nas áreas de clima temperado frio, onde é comum a ocorrência de nevascas, os telhados são ao mesmo tempo lisos e com grande grau de inclinação para evitar que a neve se acumule, provocando desabamento.

*Ressaltamos aqui a importância de o professor garantir que os alunos compreendem o que é a inclinação do telhado, podendo trazer informações ou sugerir que os alunos pesquisem, caso possuam dúvidas.*

1. Observando as imagens, qual telhado seria o mais apropriado para este tipo de clima? Justifique sua resposta.
*Espera-se que o aluno responda que o telhado mais apropriado para este tipo de clima é o telhado da imagem 2, por ser mais inclinado, deste modo não acumularia neve e evitaria desabamentos.*

2. Há diferença entre as aberturas dos telhados das casas? Em caso afirmativo, explique como você identificou essa diferença. Selecione as caixas **telhado1** e **telhado2** para auxiliar na resposta.
*Espera-se que o aluno responda que os telhados possuem aberturas diferentes. Neste momento pode ser explicado ao aluno que a abertura representa um ângulo e uma definição do mesmo.*

• Após responder a questão 2, selecione a caixa **definição** para visualizar a definição de ângulo

3. Onde é possível identificar outros ângulos nas imagens?
*O aluno pode encontrar várias representações de ângulos nas figuras. O professor pode solicitar ao aluno que indique as representações no arquivo do GeoGebra, ou que faça um esboço em sua folha. No arquivo do GeoGebra existe a caixa* **outros** *que, ao ser selecionada, apresenta algumas representações de ângulos nas figuras. Esta opção pode ser utilizada pelo professor caso os alunos sintam dificuldade em identificar ângulos nas figuras, ou então para poder trabalhar com as mesmas representações com a turma toda em algum momento que julgue necessário.*

22 Autores: Camila Maria Koftun, Celine Maria Paulek, Isaias Bonese Veiga.

• Selecione a caixa **outros** para visualizar a representação de alguns ângulos nas imagens.

4. Observando todos os ângulos representados nas imagens, identifique o maior e o menor ângulo. Justifique
*Espera-se que o aluno responda que o maior ângulo é o ângulo que possui abertura maior (telhado da casa da Imagem1) e o ângulo menor que possui abertura menor (telhado da casa da Imagem2).*

5. Não podemos garantir que um ângulo é maior ou menor apenas pela sua abertura apresentada na imagem. Então, como podemos garantir que um ângulo é maior ou menor do que outro?
*Não podemos garantir apenas observando suas aberturas. Para garantir, precisamos de suas medidas. Neste momento, caso o aluno não elabore a resposta esperada, o professor poderá explicar que os ângulos possuem medidas e, com auxílio de um transferidor, por exemplo, é possível verificar essa medida. Assim, podemos garantir qual ângulo tem amplitude maior ou menor. Neste momento vale a pena ressaltar que, embora falemos sempre que o ângulo é maior ou menor, o que comparamos são suas medidas.*

6. Clique na caixa **medida.** Agora com auxílio da ferramenta que apareceu no arquivo, meça alguns dos ângulos representados nas imagens das casas e indique suas respectivas medidas. Para utilizar a ferramenta, clique no ponto A, posicione-o sobre o vértice do respectivo ângulo e mova os pontos B e C, posicionando-os sobre os lados do ângulo.
*Espera-se que o aluno perceba que cada ângulo possui uma medida. Utilizando a ferramenta, é possível que o aluno identifique a medida dos ângulos, podendo agora diferenciá-los por suas medidas, e não mais apenas visualmente pelo tamanho da abertura. Fica a cargo do professor que oriente o aluno para registrar suas observações e medidas dos ângulos.*

7. Se você respondesse a pergunta 4 agora, sua resposta continuaria sendo a mesma? E sua justificativa?
*Espera-se que o aluno responda que indicaria o maior e o menor ângulo de acordo com sua medida, e não mais por sua abertura. Justificaria que o maior ângulo é aquele que possui medida maior e o menor ângulo o que possui medida menor.*

# Tarefa 2 - Opostos[23]

***Objetivo:*** *identificar ângulos opostos pelo vértice como sendo congruentes.*

Abra o arquivo **opostos.ggb** e siga os passos que sucedem:

1. Observe que no *software* estão representadas duas retas: **r** e **s.** O que podemos afirmar sobre a posição relativa entre as retas?
*Espera-se que os alunos respondam que as duas retas possuem um ponto em comum ou ainda que as retas são concorrentes. Caso os alunos questionem o que é posição relativa, o professor poderá explicar que é a posição das retas, uma em relação à outra.*

2. As questões dessa tarefa envolverão ângulos. O que é um ângulo? (Caso não se lembre ou tenha dúvidas, peça ajuda para seu professor).
*Nesse momento, espera-se que os alunos retomem o conceito de ângulo estudado anteriormente, respondendo que ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Caso demostrem que não sabem ou que não se lembram, o professor pode disponibilizar livros didáticos para que os alunos pesquisem, passar na lousa a definição e explicar para a turma, ou solicitar que os alunos procurem na internet.*

Clique no botão **Ângulo**. Observe que aparecem as representações dos ângulos $\alpha$ e $\beta$ e suas respectivas medidas.

3. Que relação existe entre as medidas dos ângulos $\alpha$ e $\beta$?
*Espera-se que os alunos respondam que os ângulos possuem a mesma medida.*

4. Movimente os controles deslizantes **a** e **b.** Observe o que aconteceu com as retas e as medidas dos ângulos quando movimentamos cada controle deslizante e anote suas observações.
*Almeja-se que os alunos respondam que quando movimentamos o controle deslizante* ***a,*** *a reta r é movimentada e os ângulos $\alpha$ e $\beta$ permanecem congruentes. Quando movimentamos o controle deslizante* ***b,*** *a reta s é movimentada e os ângulos $\alpha$ e $\beta$ permanecem congruentes.*

Clique no botão **Questão 5** e perceba que apareceram as representações dos ângulos $\gamma$ e $\theta$.

23 Autores: Camila Maria Koftun, Celine Maria Paulek, Jackson Rodrigo Soares.

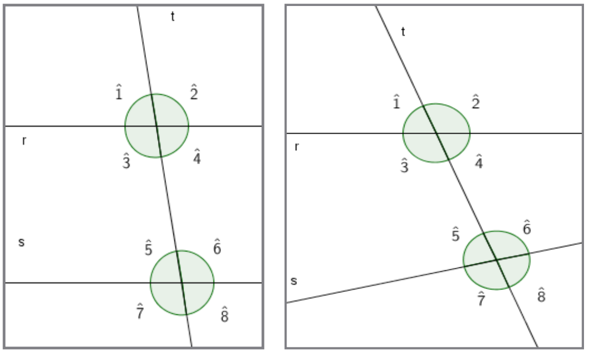
5. Com base no que foi observado entre os ângulos $\alpha$ e $\beta$, que relação os ângulos $\gamma$ e $\theta$ possuem? Como justifica essa relação?
*Espera-se que os alunos respondam que os ângulos $\gamma$ e $\theta$ possuem a mesma medida, e que isso ocorre porque são ângulos suplementares de um mesmo ângulo, logo necessariamente precisam ter a mesma medida.*
*As retas r e s se encontram no ponto E. Os ângulos AÊD e BÊC são chamados de <u>ângulos opostos pelo vértice</u>, assim como os ângulos AÊC e DÊB.*

6. Enuncie a relação existente entre ângulos opostos pelo vértice e prove que ela é verdadeira.
*Nesta questão, espera-se que os alunos enunciem que ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, já que* $\alpha$ e $\gamma$ são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é 180º assim como $\alpha$ e $\theta$. *Sendo assim, podemos escrever* $\alpha+\gamma=180°$ *e* $\alpha+\theta=180°$ *e podemos concluir que* $\gamma=180°-\alpha$ *e* $\theta=180°-\alpha$*, disto fica provada a relação entre ângulos opostos pelo vértice.*

## Tarefa 3A - Retas cortadas por transversal: Os ângulos formados[24]

***Objetivo:*** *Identificar ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos, colaterais internos e colaterais externos formados por duas retas cortadas por uma transversal.*

Quando duas retas **r** e **s** são cortadas por uma transversal **t**, formam-se 8 ângulos entre as retas **t**, **s** e **r**: .




• Ângulos correspondentes formados por duas retas cortadas por uma transversal são ângulos do mesmo lado da transversal *t* e do mesmo lado das retas *r* e *s*. Por exemplo, os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{5}$ são correspondentes.

24 Autores: Adriano Rodrigo Joly, Celine Maria Paulek, Cristiane Katchoroski, Isaias Guilherme de Souza Boruch.

1. Existem outros ângulos correspondentes nas figuras anteriores? Quais?
*Os alunos poderão perceber que existem outros ângulos correspondentes, neste caso, os ângulos* $\hat{3}$ *e* $\hat{7}$*,* $\hat{2}$ *e* $\hat{6}$*,* $\hat{4}$ *e* $\hat{8}$ *são correspondentes. Tais pares de ângulos são correspondentes independentemente de **r** e **s** serem paralelas ou concorrentes.*

• Ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal são os ângulos não adjacentes entre as duas retas e e em lados opostos da transversal . Por exemplo, os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{5}$ são alternos internos.

2. Existem outros ângulos alternos internos nas figuras anteriores? Quais?
*Os alunos podem perceber a existência de outro par de ângulos que são, entre si, alternos internos, os ângulos* $\hat{3}$ *e* $\hat{6}$*. Tais ângulos são alternos internos independentemente de **r** e **s** serem paralelas ou concorrentes.*

• Ângulos alternos externos formados por duas retas ***r*** e ***s*** cortadas por uma transversal ***t*** são os ângulos não adjacentes, em lados opostos em relação a transversal ***t***, e externos em relação às retas ***r*** e ***s***. Por exemplo, os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{8}$ são alternos externos.

3. Existem outros ângulos alternos externos nas figuras anteriores? Quais?
*Neste caso, os ângulos que serão alternos externos, além dos já citados, serão os ângulos* $\hat{2}$ *e* $\hat{7}$*. Tais ângulos são alternos externos independentemente de **r** e **s** serem paralelas ou concorrentes.*

• Ângulos colaterais internos estão em um mesmo lado em relação à reta transversal ***t*** e internos às retas ***r*** e ***s***. Por exemplo, $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são colaterais internos.

4. Existem outros ângulos colaterais internos nas figuras anteriores? Quais?
*Espera-se que os alunos verifiquem que os ângulos* $\hat{3}$ *e* $\hat{5}$ *também serão ângulos colaterais internos. Tais ângulos são colaterais internos independentemente de **r** e **s** serem paralelas ou concorrentes.*

• Ângulos colaterais externos estão em um mesmo lado em relação à transversal ***t*** e externos as retas ***r*** e ***s***. Por exemplo, $\hat{2}$ e $\hat{8}$ são colaterais externos.

5. Existem outros ângulos colaterais externos nas figuras anteriores? Quais?
*Também serão colaterais externos os ângulos* $\hat{1}$ e $\hat{7}$*. Tais ângulos são colaterais externos independentemente de r e s serem paralelas ou concorrentes.*

## Tarefa 3B - Duas retas e uma reta transversal: Questões de medidas

***Objetivo:*** *Identificar e justificar a relação de congruência entre dois ângulos alternos internos, alternos externos, e ângulos correspondentes, quando formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, e a desigualdade desses mesmos pares de ângulos no caso em que as retas não são paralelas.*

Abra o arquivo **Retas Paralelas.ggb**, onde temos duas retas *r* e *s*, paralelas entre si, cortadas por uma transversal *t*. Observe os ângulos que estão representados e responda:

1. O que podemos afirmar sobre a medida dos ângulos $\alpha$ e $\beta$? Justifique sua resposta.
*Os alunos devem relembrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. A resposta esperada é que os ângulos* $\alpha$ e $\beta$ são *congruentes, ou têm a mesma medida, por serem opostos pelo vértice*. *Poderá surgir a resposta de que estes ângulos são iguais, e diante desta resposta os alunos podem ser questionados sobre o que faz com que esses ângulos sejam "iguais", objetivando que percebam que o que é igual é a amplitude do ângulo (sua medida), e não os ângulos. Caso os alunos não lembrem (ou não saibam) que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, é importante que o professor aborde isso antes de prosseguir a tarefa, podendo recorrer à tarefa 2, Opostos, caso não tenha trabalhado com tal tarefa ainda.*

2. E sobre a medida dos ângulos *y* e $\theta$? Justifique sua resposta.
*Da mesma forma que a questão anterior, espera-se que os alunos respondam que estes ângulos são congruentes, porque* são opostos pelo vértice.

3. Clique sobre o ponto X que está no vértice do ângulo $\alpha$ e arraste até o ponto A. Que relações existem entre $\alpha$ e $\theta$? Justifique sua resposta.
*A resposta esperada é de que os ângulos $\alpha$ e $\theta$ são congruentes porque ficaram sobrepostos.*

4. Analisando as respostas anteriores, qual será a relação entre os ângulos $\beta$ e $\Upsilon$, $\beta$ e $\theta$, $\alpha$ e $\Upsilon$? Justifique sua resposta.
*Em relação aos ângulos $\beta$ e $\Upsilon$, espera-se que os alunos percebam que eles são ângulos correspondentes e congruentes. Como $\beta$ é congruente a $\alpha$ (opostos pelo vértice), $\alpha$ é congruente a $\Upsilon$. Do mesmo modo, se $\theta$ e $\Upsilon$ são congruentes (ângulos opostos pelo vértice), temos que os ângulos $\beta$ e $\theta$ também serão congruentes.*

Clique sobre o botão "**Exibir**" e responda:
5. O que podemos afirmar sobre a medida dos ângulos $\eta$ e $\omega$, $\eta$ e $\phi$, $\rho$ e $\omega$? Justifique.
*Dado que os ângulos $\eta$ e $\omega$ são correspondentes, tem-se que estes ângulos são congruentes. A congruência também ocorre com $\phi$ e $\omega$, por serem opostos pelo vértice. Então $\eta$ e $\phi$ também são congruentes. Os ângulos $\phi$ e $\rho$ são congruentes por serem correspondentes, e como $\phi$ e $\omega$ são congruentes, $\rho$ e $\omega$ também são congruentes.*

*A partir das questões 4 e 5, o professor pode chamar a atenção dos alunos para a congruência de ângulos correspondentes, alternos internos e alternos externos, pois eles podem não perceber que se tratam desses pares de ângulos.*

Observe que as relações de congruência encontradas nas questões anteriores envolviam ângulos obtidos ao cortar duas retas paralelas com uma transversal. E se as duas retas não forem paralelas? O que acontecerá com os ângulos? As relações se mantêm?

Para responder a estas questões, abra o arquivo **Retas Não Paralelas.ggb** e verifique se as congruências identificadas anteriormente ainda são verdadeiras.
*Para verificar se as relações de congruência se mantêm, os alunos deverão utilizar o arquivo que possui retas não paralelas cortadas por uma transversal e analisar os ângulos correspondentes, alternos internos e alternos externos. Eles poderão observar que a congruência não se mantém quando as retas não são paralelas.*

## Tarefa 4 - Ângulos e Triângulos[25]

***Objetivo:*** *Identificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Por mais que o objetivo da tarefa seja que o aluno identifique qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, o arquivo do GeoGebra possibilita identificar, por meio de ângulos correspondentes congruentes, os motivos pelos quais tal soma será sempre 180°.*

Abra o arquivo **ângulos_e_triângulos.ggb** e siga os passos descritos a seguir:
1. Observe o polígono representado no software GeoGebra. Que polígono é esse? Você sabe qual a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono?
*Tal questão tem por objetivo proporcionar ao aluno o primeiro contato com a*

25 Autores: Adriano Rodrigo Joly, Celine Maria Paulek, Isaias Guilherme de Souza Boruch.

*tarefa, deixando claro que será abordado o triângulo e seus ângulos como objeto de estudo. Quando o aluno é questionado sobre a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo, procura-se despertar interesse na atividade e justificar a ele o motivo pelo qual os passos seguintes serão desenvolvidos. Caso algum aluno responda que a soma dos ângulos internos é 180°, o professor poderá utilizar a tarefa solicitando ao aluno que justifique o motivo pelo qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Caso os alunos não consigam determinar inicialmente qual a soma dos ângulos internos de um triângulo, o professor poderá convidar os alunos a desenvolverem a tarefa e ao final responderem tal questionamento.*

Vamos determinar qual é a soma dos ângulos internos desse triângulo e verificar se este valor é constante para qualquer triângulo.

2. Clique no botão **Iniciar**, no canto superior direito da tela. Quais novos elementos surgiram na tela? O que significa **r** // **s**?
*Ao clicar no botão **Iniciar** surgirão na tela quatro retas: **u**, **v**, **r** e **s**. Espera-se que os alunos respondam que as retas **r** e **s** são paralelas. Tais retas surgem na construção para que seja possível determinar quais ângulos são correspondentes e congruentes.*

3. Sabendo a posição entre as retas **r** e **s**, qual a posição relativa entre a reta **v** e as retas **r** e **s**? E entre **u** e as retas **r** e **s**?
*A intenção é que o aluno perceba que a reta **v** é transversal às paralelas **r** e **s**. O mesmo se aplica à reta **u**.*
*Os passos a), b) e c) têm por objetivo construir na parte superior da reta **s** o ângulo raso, com vértice em C, que será congruente à soma dos ângulos internos do triângulo ABC. No momento em que o X que está no vértice A for arrastado até o vértice C, surgirá na semirreta um ponto P. Tal ponto foi criado para auxiliar o aluno na formação do ângulo de 180°, de modo que as representações dos ângulos não fiquem sobrepostas.*

a) Observe o vértice *A* do polígono. Clique no X que está sobre tal vértice e o arraste até que o X fique sobre o vértice *C*.

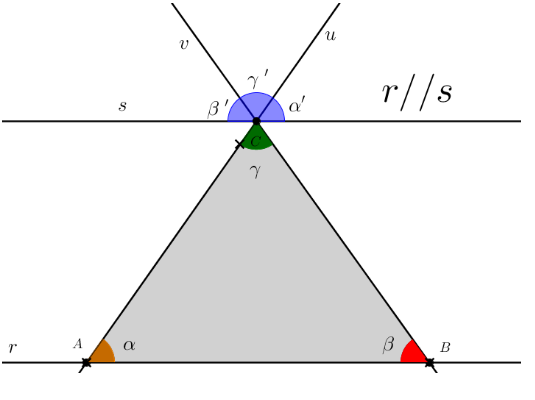
b) Observe o vértice *B* do polígono. Clique no *X* que está sobre tal vértice e o arraste até que o X fique sobre o vértice *C*.

c) Perceba que quando você arrastou o X do vértice *A* até o vértice *C*, surgiu um ponto *P* sobre a reta *u*. Perceba também que há um X sobre a semirreta CA. Arraste esse X até que ele fique sobre o ponto *P*.

4. Qual a medida do ângulo formado pela união dos ângulos vermelho, laranja e verde? Como podemos classificar tal ângulo?
*Espera-se que o aluno identifique que o ângulo formado mede 180° e que este ângulo é um ângulo raso.*

5. Movimente os pontos *A*, *B* e *C*, criando um triângulo diferente do inicial. Arraste os ângulos vermelho, verde e laranja, tal como você fez nos passos a), b) e c). A união dos três ângulos forma um ângulo com mesma medida daquele formado na questão anterior?
*Almeja-se que novamente os alunos identifiquem que a soma das medidas dos ângulos vermelho, verde e laranja é 180°, tal como na questão anterior.*

6. O que podemos afirmar sobre a soma dos três ângulos internos de um triângulo? Se precisar, crie novos triângulos e investigue o que acontece.
*Espera-se que os alunos tenham observado que os ângulos vermelho, verde e laranja correspondem aos ângulos do triângulo ABC e que a soma das medidas de tais ângulos será sempre 180°. Caso o aluno não consiga chegar a tais conclusões, o professor poderá solicitar a ele que repita o passo 5, observando o que ocorre com a soma das medidas dos ângulos vermelho, verde e laranja.*
*A partir das observações feitas e conhecimentos construídos no desenvolvimento da tarefa e também nas tarefas anteriores, os alunos poderão justificar o motivo pelo qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. O professor pode solicitar aos alunos que busquem tal justificativa, ou então desenvolver tal justificativa juntamente com os alunos. Com base na imagem presente no arquivo* ***ângulos_e_triângulos.ggb****, podemos escrever esta justificativa como no exemplo a seguir.*



*Dado que as retas r e s são paralelas e ambas são cortadas pela transversal u, temos os ângulos $\alpha$ e $\alpha'$, congruentes por serem correspondentes. Analogamente, como v é transversal às paralelas r e s, temos formados os ângulos $\beta$ e $\beta'$, congruentes por serem correspondentes. Considerando que as retas u e v são concorrentes, temos que os ângulos $\gamma$ e $\gamma'$ são congruentes por serem opostos pelo vértice. Como a soma das medidas de $\alpha'$, $\beta'$ e $\gamma'$ é de 180° então a soma das medidas de $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ também é de 180°.*

## Tarefa 5 - Ângulos e Polígonos[26]

***Objetivo:*** *Determinar uma relação que permita calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados.*

1. Abra o arquivo **soma dos ângulos.ggb**. Selecione a caixa **exibir polígono1**. Observe a figura que se forma. Quantos lados tem o polígono que se formou? Em quantos triângulos ele foi dividido? A partir de suas observações, preencha a primeira linha do quadro a seguir.

*O polígono que se formou tem quatro lados e foi dividido em dois triângulos.*

| | Número de lados do polígono | Número de triângulos dentro do polígono | Soma dos ângulos internos do polígono |
|---|---|---|---|
| Polígono 1 | *4* | *2* | *360°* |
| Polígono 2 | *5* | *3* | *540°* |
| Polígono 3 | *6* | *4* | *720°* |
| Polígono 4 | *7* | *5* | *900º* |
| Polígono 5 | *8* | *6* | *1080°* |
| Polígono 6 | *9* | *7* | *1260°* |
| Polígono 7 | *10* | *8* | *1440°* |
| Polígono 8 | *11* | *9* | *1620°* |

2. Selecione as demais caixas, observe as figuras que se formam e, a partir de suas observações, complete a linha correspondente a cada polígono.

3. Descreva o raciocínio utilizado para preencher a terceira coluna (soma dos ângulos internos do polígono) do quadro anterior.

26 Autores: Isaias Bonese Veiga, Celine Maria Paulek

*Os alunos podem responder que é o número de triângulos formados no polígono multiplicado por 180°, que é a soma dos ângulos internos de cada triângulo. Outra opção é o aluno perceber que para o quadrilátero é 360º e que a cada lado do polígono que aumenta, um triângulo é acrescentado, e dessa forma irá acrescentar 180º. Caso os alunos apresentem dificuldades, o professor pode questionar em relação ao triângulo, que já é um polígono conhecido, e como o que já sabem em relação ao triângulo pode ajudar a preencher a terceira coluna.*

4. Que relação existe entre o número de lados do polígono e o número de triângulos formados dentro do polígono?
*Os alunos podem perceber que o número de triângulos formados dentro do polígono é sempre igual ao número de lados do polígono menos dois. É importante que o professor questione os alunos sobre o porquê desta relação, para que eles consigam perceber que unindo um vértice do polígono a outro eu consigo formar triângulos, exceto ao unir dois vértices consecutivos. Por isso o número de triângulos é o número de lados do polígono diminuído de dois, que são os segmentos que não formam triângulos.*

5. Determine uma relação que permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados.
*Se o número de triângulos formados em um polígono de n lados é (n - 2), e a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180º, a soma dos ângulos internos (S) de um polígono de n lados pode ser determinada por: (n - 2) . 180.*

6. Utilizando a relação que você encontrou na questão anterior preencha o quadro a seguir.

| Número de lados do polígono | Número de triângulos dentro do polígono | Soma dos ângulos internos do polígono |
|---|---|---|
| 6 | 4 | 720º |
| 10 | 8 | 1440º |
| 23 | 21 | 3780º |
| 37 | 35 | 6300º |

7. Selecione a caixa exibir ângulos e verifique que apareceram os ângulos internos dos polígonos. Com o auxílio de uma calculadora, some os ângulos internos de cada polígono e compare o resultado obtido com os valores obtidos na questão três.
*Os alunos devem verificar que os valores coincidem. Caso os valores não coincidam, o professor deverá intervir e questionar o aluno acerca da relação determi-*

*nada por ele, do cálculo realizado na questão 6 e também da soma realizada na calculadora, pois elas podem conter erros e confundir os alunos. Caso a relação apresentada pelo aluno não esteja correta, o professor poderá questioná-lo de modo que repense o que fez e identifique o que precisa ser alterado. Outra questão importante de ser analisada é em relação aos arredondamentos, visto que o software GeoGebra faz arredondamentos que podem levar a aproximação, e não exatidão, dos resultados.*

## Tarefa 6 - Triângulo Retângulo[27]

***Objetivo:*** *identificar cateto oposto e cateto adjacente em relação a um ângulo agudo no triângulo retângulo.*

1. Abra o arquivo **triângulo_retângulo.ggb** realize a tarefa seguindo as orientações contidas no software.

*A tarefa permite que o aluno arraste os pontos A e B, alterando o triângulo formado. É importante informar aos alunos que, para digitar a resposta, deve-se inicialmente clicar dentro da caixa e em seguida digitar. As palavras devem ser escritas em letras minúsculas considerando os acentos (a nomenclatura específica de segmentos é escrita normalmente em caixa alta, por exemplo, segmento AB) e, após responder, teclar enter. Quando a resposta estiver correta, o texto ficará verde; em seguida, o aluno poderá clicar em próximo e continuar a tarefa.*
*Alguns passos da tarefa aceitam mais de uma opção de resposta, para dar mais liberdade ao aluno na hora de desenvolvê-la. A seguir, as opções de resposta aceitas na tarefa e algumas orientações:*
*3º passo: triângulo*
*4º passo: noventa graus/ 90° / 90 graus*
*retângulo /triângulo retângulo*
*Se no momento em que o aluno for questionado sobre a medida do ângulo ele apresentar como resposta apenas o valor 90, o software não reconhecerá a resposta como correta. Isso ocorre devido à falta da unidade de medida, no caso, o grau. O professor poderá questionar ao aluno como se mede um ângulo, dando ênfase em sua unidade de medida para que o aluno consiga formular a resposta correta.*
*5º passo: cateto*
*cateto*
*hipotenusa*

27 Autores: Adriano Rodrigo Joly, Camila Maria Koftun, Celine Maria Paulek, Isaias Bonese Veiga, Isaias Guilherme de Souza Boruch, Jackson Rodrigo Soares.

*8º passo: AB/ BA/ cateto AB/ cateto BA*
*CD/ DC/ cateto CD/ cateto DC*

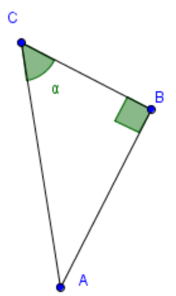
*Caso os alunos não recordem como é feita a nomenclatura de um segmento, o professor poderá explicar que, usualmente, um segmento é nomeado de acordo com suas extremidades, por exemplo, um segmento com extremidades em A e B é nomeado como AB ou BA.*

*9º passo: BC /CB/ cateto BC/ cateto CB*
*AB/ BA/ cateto AB/ cateto BA*

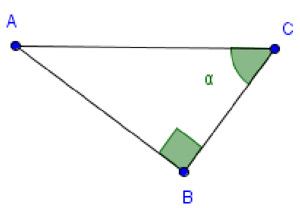
*Ao final da tarefa no software o aluno terá tarefas impressas onde deverá identificar catetos opostos e adjacentes em triângulos retângulos. Neste momento, o professor poderá perceber se os alunos conseguem identificar catetos opostos e adjacentes em triângulos posicionados de forma diferente dos que foram propostos na tarefa, bem como analisar os catetos em relação aos dois ângulos agudos de um triângulo retângulo. Caso os alunos tenham dificuldade na resolução da tarefa, o professor poderá solicitar que voltem a observar suas respostas no software, algo que é possível clicando-se no botão "Anterior". Também é possível que o professor peça aos alunos que movimentem os pontos A e C e observem se as respostas plotadas no software continuariam as mesmas.*

2. Agora que você já passou por todos os passos da tarefa no GeoGebra, observe os triângulos a seguir e identifique o que se pede:

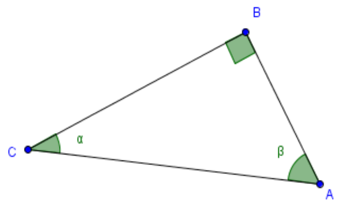
a) Cateto oposto em relação a $\alpha$:________
Cateto adjacente em relação a $\alpha$:________



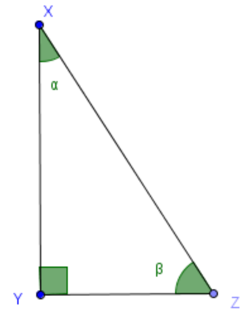

b) Cateto adjacente em relação à $\alpha$:________
Cateto oposto em relação à $\alpha$:________



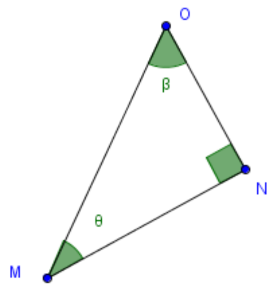
c) Cateto oposto em relação à $\alpha$:________
Cateto adjacente em relação à $\alpha$:________
Cateto oposto em relação à $\beta$:________
Cateto adjacente em relação à $\beta$:________




d) Cateto oposto em relação à $\alpha$:________
Cateto adjacente em relação à $\alpha$:________
Cateto oposto em relação à $\beta$:________
Cateto adjacente em relação à $\beta$:________




e) Cateto oposto em relação à $\beta$:________
Cateto adjacente em relação à $\beta$:________
Cateto oposto em relação à $\theta$:________
Cateto adjacente em relação à $\theta$:________




## Tarefa 7 - Razões[28]

***Objetivo:*** *Identificar que as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) são constantes em relação a um ângulo agudo e que cada razão relaciona as medidas de dois lados de um triângulo retângulo.*

Abra o arquivo **razões.ggb**. Movimente os controles deslizantes $\beta$ e **CD** e observe que ocorrem algumas alterações no polígono.

*As questões 1, 2 e 3 têm como objetivo que os alunos identifiquem os lados do triângulo retângulo que aparece no arquivo como sendo cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa em relação ao ângulo $\beta$, conceitos que serão necessários para o desen-*

28 Autores: Adriano Rodrigo Joly, Camila Maria Koftun, Celine Maria Paulek, Isaias Bonese Veiga, Isaias Guilherme de Souza Boruch, Jackson Rodrigo Soares.

*volvimento da tarefa. Estes conceitos foram trabalhados na tarefa 6, caso o aluno não tenha realizado-a. É importante que o professor relembre o que é o triângulo retângulo e os nomes relativos aos lados deste triângulo*

1. Clique no botão **Questao1** e observe a Razão 1. Em relação ao ângulo β, como é denominado o lado **e** do triângulo retângulo? E o lado **d**?
*Nesta questão espera-se que os alunos respondam que o segmento e é o cateto oposto e o segmento d é a hipotenusa.*

2. Clique no botão **Questao2** e observe a Razão 2. Em relação ao ângulo β, como é denominado o lado **f** do triângulo retângulo? E o lado **d**?
*Nesta questão espera-se que os alunos respondam que o segmento f é o cateto adjacente e o segmento d é a hipotenusa.*

3. Clique no botão **Questao3** e observe a Razão 3. Em relação ao ângulo β, como é denominado o lado **e** do triângulo retângulo? E o lado **f**?
*Nesta questão espera-se que os alunos respondam que o segmento e é o cateto oposto e o segmento f é o cateto adjacente.*

4. Movimente o Controle Deslizante β. O que ocorre com os valores das razões 1, 2 e 3?
*Espera-se que ao manipular o controle deslizante β os alunos respondam que os valores das razões 1, 2 e 3 se alteram. Caso os alunos questionem sobre o valor da razão que aparece no arquivo por não terem observado que é a razão entre a medida de dois lados do triângulo, o professor pode fazer questionamentos que levem os alunos a perceberem isso.*

5. Em relação aos valores das razões 1, 2 e 3, faça o que se pede:
*O objetivo destes itens está em os alunos perceberem que as razões 1, 2 e 3 não se alteram com a manipulação do controle deslizante **CD** enquanto o controle β está fixado. Os ângulos de 30º, 45º e 60º foram escolhidos por serem ângulos notáveis.*

a) Deixe o valor do controle deslizante β em **30°**. Movimentando o controle deslizante **CD,** escolha cinco valores distintos para **CD** e anote no quadro a seguir junto com os respectivos valores das razões 1, 2 e 3.

| Valor do Controle deslizante CD | Valor da Razão 1 | Valor da Razão 2 | Valor da Razão 3 |
|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,87 | 0,58 |
| | 0,5 | 0,87 | 0,58 |
| | 0,5 | 0,87 | 0,58 |
| | 0,5 | 0,87 | 0,58 |
| | 0,5 | 0,87 | 0,58 |

b) Deixe o valor do controle deslizante β em **45°**. Movimentando o controle deslizante **CD**, escolha cinco valores distintos para **CD** e anote no quadro aa seguir junto com os respectivos valores das razões 1, 2 e 3.

| Valor do Controle Deslizante CD | Valor da Razão 1 | Valor da Razão 2 | Valor da Razão 3 |
|---|---|---|---|
| | 0,71 | 0,71 | 1 |
| | 0,71 | 0,71 | 1 |
| | 0,71 | 0,71 | 1 |
| | 0,71 | 0,71 | 1 |
| | 0,71 | 0,71 | 1 |

c) Deixe o valor do controle deslizante β em **60°**. Movimentando o controle deslizante **CD,** escolha cinco valores distintos para **CD** e anote no quadro a seguir junto com os respectivos valores das razões 1, 2 e 3.

| Valor do Controle Deslizante CD | Valor da Razão 1 | Valor da Razão 2 | Valor da Razão 3 |
|---|---|---|---|
| | 0,87 | 0,5 | 1,73 |
| | 0,87 | 0,5 | 1,73 |
| | 0,87 | 0,5 | 1,73 |
| | 0,87 | 0,5 | 1,73 |
| | 0,87 | 0,5 | 1,73 |

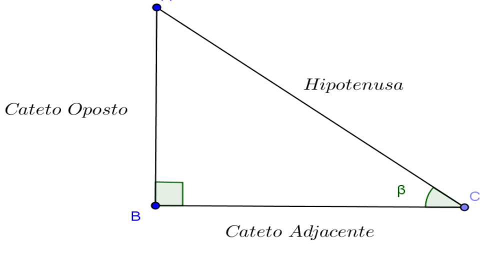
d) Escolha um valor de sua preferência, diferente de 30°, 45° e 60°, para o seletor β. Mantendo o valor escolhido para β, movimente o controle deslizante **CD** e preencha o quadro seguinte:

*Nesta questão é importante que cada aluno atribua um valor para β para que possa conferir que as regularidades entre as razões encontradas nas questões anteriores valem para quaisquer triângulos retângulos, independente do valor escolhido para β, não apenas para 30º, 45º e 60º utilizados anteriormente. Mesmo o arquivo não permitindo que o aluno escolha um valor igual ou maior que 90º, o professor pode relembrar que por se tratar de um triângulo retângulo, não há* *possibilidade de escolher para β um valor igual ou maior que 90º, pois no triângulo retângulo o maior ângulo é um ângulo reto, os outros ângulos são agudos.*

| Valor escolhido para β: | | | |
|---|---|---|---|
| Valor do controle deslizante CD | Valor da razão 1 | Valor da razão 2 | Valor da razão 3 |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

e) Observe os quadros das questões *a, b, c* e *d*. Que regularidades você pode observar?
*Espera-se que os alunos, ao observarem as respostas obtidas nas questões a, b, c e d, percebam que os valores das razões 1, 2 e 3 estão relacionados ao ângulo β escolhido e não se alteram conforme modificamos os valores dos lados do triângulo. É importante que o professor possibilite aos alunos compreender que as razões continuam iguais quando modificamos os valores dos lados do triângulo, porque os triângulos encontrados são semelhantes e os valores dos lados desses triângulos são proporcionais. Sendo assim, as razões entre os lados de cada triângulo são as mesmas.*
*É possível também que os alunos percebam que seno e cosseno de ângulos complementares se invertem. Outras regularidades podem ser apontadas pelos alunos e é sempre importante que sejam exploradas pelo professor.*

Estas três razões que vocês estudaram nessa tarefa são chamadas de Razões Trigonométricas em um triângulo retângulo. Cada uma delas tem um nome, como podemos ver a seguir:
A Razão 1 $\left(\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}\right)$ é chamada de **Seno** em relação ao ângulo β (sen β).
A Razão 2 $\left(\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}\right)$ é chamada de **Cosseno** em relação ao ângulo β (cos β).
A Razão 3 $\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right)$ é chamada de **Tangente** em relação ao ângulo β (tg β)



Este livro foi composto nas tipologias Swiss721 e
Geometr415, impresso em cartão 250g e papel
Offset 75g certificados, provenientes de florestas
que foram plantadas para este fim, e produzido
com respeito às pessoas e ao meio ambiente.

Publique seu livro. Viabilizamos seu projeto cultural!
Visite nossa home page:
**www.ithala.com.br**

O GeoGebra e a *Matemática* da Educação Básica” emerge no contexto de discussões, ações e reflexões do subprojeto do Pibid – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, intitulado “Tecnologias e Formação de Professores para o ensino da *Matemática*”. Trata-se, portanto, de um dos resultados do trabalho colaborativo de professores universitários (formadores de professores), professores da Educação Básica e alunos da licenciatura em *Matemática* (futuros professores), cuja pertinência e abrangência residem na multiplicidade de olhares, experiências e perspectivas que suportam as tarefas matemáticas que o compõem e, especialmente, os quadros de orientação e referência associados a cada uma delas.

Nesse sentido, esta obra abarca discussões teóricas e proposições de tarefas que articulam o software GeoGebra e o ensino exploratório de *Matemática*. Ensino, cujas facetas e complexidades justificam os quadros de orientação para ações do professor associadas a possíveis ações dos alunos no processo de resolução, que acompanham cada tarefa. Contudo, essas discussões não intentam esgotar a diversidade de estratégias, registros e ideias que podem emergir das atividades dos alunos, mas significam um convite a todos aqueles que, por algum motivo, se sintam provocados ou desafiados pela presente proposta cuja preocupação resida especialmente na aprendizagem de *Matemática*.

UNESPAR Universidade Estadual do Paraná · Pibid Unespar · Pibid Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência · BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL · CAPES

ISBN 978.85.5544.087.8

ithala.com.br